Quelle est la part imprescriptible du calcul en mathématiques ?

Discussion sur l'Analyse mathématique, avec en perspective le si bien nommé Calcul (différentiel et intégral), l'Analyse de Fourier, et en ligne de mire les explications de Turing sur le « calculable ».

Jean Dhombres[1]

[1] Centre Koyré, EHESS, Paris.

Je reconnais le paradoxe qu'il y a à parler d'imprescriptibilité - terme juridique - à propos d'une réflexion épistémologique que je veux mener et qui est fortement installée dans l'histoire, et donc forcément relative. Elle ne saurait être concluante à la façon d'une vérité nécessaire, comme les aiment tant les mathématiciens. Pourtant je veux faire comprendre à quel point le calcul est un processus cognitif qui a ses référents propres, et qu'à les ignorer l'enseignant, d'ailleurs à tous les niveaux jusqu'à celui de la recherche, risque de bloquer le travail de l'apprenant. Et nous sommes tous des apprenants, peut-être même de ce que nous découvrons.

Certes le terme « calcul » requiert une description, sinon une définition. Et si je dois progressivement y venir en suivant le logicien Alan Turing sans pour autant penser que cette définition ait été prévue, donc en envisageant sa définition comme une ligne de mire, je peux quand même faire ressortir l'originalité ancienne de la pratique des calculs et ainsi faire la différence avec la pratique du raisonnement de type géométrique sur figures, du raisonnement de type logique (par le syllogisme), et plus généralement du raisonnement rhétorique ou analogique (par d'autres figures, celles de style). Non en vue d'établir une typologie des calculs, mais pour me permettre de voir les interventions effectives des techniques de calcul. Sans pour autant réduire tous les calculs au Calcul, le nom qui a été trouvé pour désigner d'un seul mot le calcul différentiel et intégral qui date du XVII^{e} siècle.

On doit éradiquer l'idéologie spontanée, qui consiste à dire que le calcul est part technique, et s'intéresser à ce que voulait signifier Leibniz lorsqu'il évoquait un jeu de « pensées aveugles » à propos des différentielles et surtout de leurs manipulations. L'expression est certes paradoxale, mais je veux l'explorer de façon pratique en accompagnant justement la notion de calculable qui tient à ces manipulations. En fait je vais me limiter aux manipulations d'un Roberval qui peuvent passer pour une préhistoire du Calcul. Car il s'agit de comprendre un des sens du mot analyse dans le cadre de la pensée mathématique, et pourquoi l'expression « Analyse » a largement recouvert le Calcul proprement dit. Et pourquoi on a eu besoin d'une autre expression, celle d'Analyse de Fourier. Qui peut en effet prétendre qu'une pensée soit limitée à son champ d'exercice ? L'épistémologie historique des mathématiques n'a pas vocation à animer un club de spécialistes.

Mon approche, que j'espère suffisamment sérieuse même si elle surfe sur bien des résultats mathématiques, n'est pas classique en histoire des sciences : je profite d'une liberté d'expression que l'érudition empêche le plus souvent, et je ne choisis pas les textes les plus parcourus, ni les grandes déclarations, mais des textes dans lesquels se manifeste une expérimentation.

Mes intentions comme introduction

Si je prends au sérieux le sujet de ce séminaire Phiteco 2018, et me réjouis de pouvoir participer en tant que mathématicien et historien à une réflexion pluridisciplinaire à l'Université de Compiègne, me souvenant d'y avoir reçu il y a des années un Grand prix Roberval, c'est en particulier parce que le titre de la semaine prévue évoque les « pratiques ». Or ce mot n'était quasiment pas associé à la vie mathématique, jusque disons la fin du XX^e^ siècle. Justement jusqu'à ce qu'on invente un terme général, « le numérique », qui a semblé modifier notre perception de l'activité mathématique, et fourni assurément un ressenti social à propos des mathématiques elles-mêmes. Ne dit-on pas : les algorithmes, c'est la faute aux matheux !

La perception est qu'une machine, disons un outil matériel même s'il fonctionne électroniquement, s'interpose dans la façon dont, dans le monde entier, les mathématiciens travaillent, et celle par laquelle ils organisent leurs pratiques, entendues au sens le plus large. Superficiellement, il est évident que l'on ne peut plus publier un article de mathématiques si on n'utilise pas le TeX. Seul moyen que le langage des équations, des fonctions, des intégrales, des *edp*, etc., soit lisible sur le Net. Pensez à ces articles de Wikipedia où toute équation pose un problème souvent insoluble. Et pensez corrélativement que les systèmes ordinaires d'écriture vous refusent quelque chose d'aussi simple que $\frac{a}{b}$, et donc nous imposent l'ambiguïté lorsqu'est écrit : *ax+b/cx +sinx*. S'agit-il de $\frac{ax+b}{cx}+\sin x$, ou de $ax+\frac{b}{cx+\sin x}$, etc. Moins superficiellement, je sais que je n'ai plus besoin de m'encombrer la mémoire de formules trigonométriques, ou sur les fonctions elliptiques, voire à propos d'une cardioïde : d'un coup je les retrouve sur le Net, ma « pratique » m'ayant appris maintenant à faire les bons choix. Moins superficiellement encore, ai-je besoin de me tracasser pour tracer une fonction, décomposer un opérateur matriciel, ou décomposer un polynôme associé à un nœud en combinatoire topologique ? Voire simuler une situation fractale dans les conditions aux limites d'une suite récurrente ? Mais s'agit-il ici de cela ?

Si j'ai mis d'emblée le verbe « sembler » dans le constat des transformations de la vie mathématique par le numérique, ce n'est ni pour *a priori* m'en réjouir ou m'en offusquer, mais c'est pour permettre une réflexion qui requiert d'abord une distance prise sur nos habitudes. Et je ne dis pas ici nos pratiques, car évidemment le mathématicien, apprenant ou cherchant, est toujours à l'affut de ce qu'il fait et de la théorie qu'il en fait. Cette distance réflexive, je veux aujourd'hui la mettre grâce à l'histoire à propos de ce qui concerne les calculs. Ce qui peut sembler d'emblée paradoxal ; puisque j'ai évoqué un nouveau régime qui « semblerait » s'imposer à tous dans le monde avec le nouveau siècle, lequel a presque déjà l'âge d'une génération. Mais il n'est pas très difficile de se souvenir que le mot « calcul », sans qu'on lui mette une majuscule comme dans *Calculus* qui désigne au singulier une double opération (le calcul différentiel et le calcul intégral), a le plus souvent désigné l'aspect terre à terre de la pratique mathématique, donc est négligé dans un exposé qui veut aller à l'essentiel. « Tous calculs faits » lit-on souvent dans un article !

Prendre pour argent comptant une telle phrase, la prendre comme une observation ordinaire, c'est considérer le calcul comme une technique par rapport à ce qui serait la vraie science, les mathématiques. Alors justement que ce qui est en cause est de pouvoir dire qu'il n'y a plus qu'à faire des calculs prévus. Ne vaut-il pas mieux estimer qu'il y a des différences entre les disciplines mathématiques dans leurs façons d'intégrer les parties calculatoires ? Dans la mesure justement où l'esthétique joue un rôle, puisque l'on parle quelquefois d'un calcul élégant. L'élégance, la convenance disait-on plutôt en grec, n'est-ce pas l'adéquation entre une pensée, une forme et un calcul ?

En parlant dans le titre de mon exposé de part imprescriptible du calcul, je n'entends pas confondre calcul et mathématiques, ou science et technique. Je m'intéresse à ce qui justement est considéré comme ce qui permet le « machinal », soit ce à quoi il n'est pas besoin d'attacher de l'attention, dans un cours de mathématiques comme dans un article de recherche. Qu'il soit écrit par Archimède, Pascal, Einstein, Kolmogorov, Alan Turing, ou Cédric Villani pour citer un nom contemporain de quelqu'un qui a pris la peine d'écrire un roman sur sa pratique mathématique, *Théorème vivant*[2]. Le « machinal » d'un calcul ne saurait être le synonyme d'absence de pensée. Le machinal ne signalerait-il que l'après, une fois passée la pensée qui gère le calcul ? Autre façon de questionner : par quel processus quelque chose de découvert devient-il machinal ? Si l'on s'intéresse précisément aux pratiques, c'est plutôt une troisième question qui se pose, et qui met le calcul au rang de la recherche sous la forme du tâtonnement. Le calcul peut être le lieu de l'expérimentation, c'est-à-dire une mise en place éventuellement machinale, juste pour voir, de procédures, voire d'algorithmes comme on dit aujourd'hui, *a priori* non adaptés à ce dont il est question.

Devant un public sans culture scientifique, pour ne pas oublier le sens des convenances, et de l'harmonie, j'aurais dû restreindre mon exposé à la théorie des proportions que l'on trouve dans les « Eléments d'Euclide » au livre V, qui a été considéré comme l'un des plus abstraits de l'œuvre de l'Alexandrin, en tout cas non géométrique au sens de géométrie des figures, et qui d'ailleurs a souvent été tronqué dans les exposés universitaires jusqu'au XVII^e^ siècle, aussi bien dans le monde arabophone qu'européen. Alors qu'au delà d'un exposé axiomatique cette théorie des proportions avait généré un calcul, longtemps rangé sous le nom grec de *logistikos*, à mi-chemin entre calcul et raisonnement, une technique, souvent effacée ou mal retransmise par les manuscrits qui nous restent, par exemple ceux sur la « Dimension du cercle d'Archimède » où est donnée la célèbre approximation de pi entre 220/71 et 22/7. Mais grâce à cette culture scientifique à l'Université de technologie de Compiègne, je peux travailler avec vous d'une façon moins banale et moins philologique, sans pour autant perdre l'auditoire par la technique mathématique. Vous y veillerez de toutes façons !

Je commencerai par l'exemple d'une courbe, la cycloïde, et envisagerai en quoi une technique de calcul, d'avant le Calcul pourtant, inventée par un dénommé Roberval, fort connu dans la région de Compiègne comme je l'ai déjà signalé, a permis d'envisager la construction de la tangente en tout point de cette courbe. Avant la fin du XVII^e^ siècle, Roberval a fait surgir le document essentiel à mes yeux pour cet exposé : la courbe des sinus. Cela fournit pratiquement la représentation de la périodicité, et sans doute jusqu'à l'idée de ce qu'est une onde. Mais suis-je autorisé, intellectuellement et historiquement, à parler à propos de ce document de graphe de la fonction sinus ? En quoi ce dessin relève-t-il d'un calcul ? J'opposerai, pour les besoins ici de faire vivre une aventure, le récit autre d'une grande élégance qui passe par la géométrie, la rotation instantanée, et l'absence donc de calcul. Ce sera mon premier cas, mais dont je ne me débarrasserai pas si vite.

Car son analyse me permettra de distinguer ce qui dans ce calcul de la tangente est pensé. Et de voir qu'en fait derrière le combat des deux rivaux de la fondation du Calcul, Leibniz et Newton dans la décennie débutant en 1670, se profile une réflexion particulière autour de ce qui allait devenir la simple technique du graphe d'une fonction. Chez Leibniz, elle sera menée avec les différentielles, et un calcul dont il dit lui-même qu'il est une « pensée aveugle ». Chez Newton, s'imposeront les séries entières, dont celle du sinus qui est envisagée comme pur calcul, qui ne requiert rien, et dont la considération s'avère très avantageuse par rapport au calcul antérieur des tables numériques de logarithmes : ces tables avaient fait la brillante actualité du début du XVII^e^ siècle et requéraient des années de calcul. Les voilà réduites à bien peu par l'intervention de ces séries, que bien sûr Leibniz

---

[2] Cédric Villani, *Théorème vivant*, Paris, 2012.

avait tout autant. Ce fut, il y a plus de trois siècles, une victoire éclatante du numérique et des algorithmes. Personne pourtant ne s'avisa d'y voir l'achèvement du Calcul. Il restait tant encore à comprendre. Et par exemple que les séries entières relèvent du calculable au sens de Turing que je présenterai en IV^{e} partie.

Mais je ne veux pas faire l'histoire du Calcul ! Il s'agit pour moi de réfléchir sur les raisons qui font que l'idée de Roberval n'a pas pu être mise en œuvre par lui, raisons psychologiques, mais aussi sociales et d'organisation de la recherche à son époque vers les années 1640. Cette réflexion sur ce que je vais présenter comme une analyse ne fait surtout pas l'impasse sur la pratique du maniement des fonctions. Cette pratique est devenue banale aujourd'hui avec la construction des variations des fonctions. Ma première étude se restreint donc au surgissement chez Roberval de l'objet « fonction numérique ». En raison de ce choix, je ne dois pas me laisser entraîner par la facilité de la représentation figurée, bref il me faut éviter d'esquiver la part du calcul dans cette représentation désormais ordinaire. L'avantage de l'histoire de type archéologique que je mène est de montrer que le calcul a façonné la représentation, et que celle-ci n'est devenue banale que dans la mesure où le calcul devenait commun. Il ne s'agit pas de détruire le sentiment d'évidence d'une telle représentation, mais de reconstruire ce que cette évidence a impliqué comme intégration du calcul dans la pensée, et jusqu'au délaissement de Roberval qui est un de ceux ayant fait les premiers pas sur ces fonctions numériques. Cela constituera une première partie.

Je prendrai un deuxième exemple, et ce sera celui des séries de Fourier sur les fonctions numérique périodiques, mais en partant du calcul effectué par Fourier vers 1807 pour parvenir aux relations intégrales d'orthogonalité, dont on peut dire qu'elles suffisent pour établir l'inégalité de Heisenberg en mécanique quantique. Cet exemple qui court sur plus d'un siècle sera développé en deux parties. Il s'agira d'abord de montrer qu'un calcul rigoureux, quand il n'est pas dirigé, ne peut pas en général produire quelque chose. D'une part, l'exemple des coefficients de Fourier établit que la découverte d'un résultat simple par un calcul compliqué prouve littéralement qu'il existe une structure derrière la simplification finale. C'est certainement cet aspect qui fait vivre le platonisme chez les mathématiciens, la pensée d'un monde où existeraient les « objets » mathématiques. D'autre part, en dépit de la simplicité de la preuve de l'inégalité, la compréhension de ce que porte la formule de Heisenberg expliquée en troisième partie, ne tient pas au beau formalisme de la preuve mathématique ; elle adhère spécifiquement à la réalité. J'implique paradoxalement dans ce dernier mot la discipline appelée mécanique quantique. C'est un rappel fondamental qu'il existe une part physique aussi dans les mathématiques, un lien avec le monde, même s'il passe par le tamis hautement abstrait de la physique quantique, qui quelquefois fait appeler ontologie cette part. Mon attitude donne sa place à l'épistémologie au cœur même de l'acte scientifique ; car c'est bien une réflexion épistémologique qui fait apparaître les ondelettes actuelles comme relevant à proprement parler d'une critique, au sens philosophique, de l'Analyse de Fourier dont je dois parler. Les calculs et la réflexion sur les calculs peuvent servir à construire, et pas seulement à constater. Je reviendrai pourtant à la fin de la IIème partie sur le seul Roberval, et sa façon d'introduire numériquement l'intégrale et son calcul. Car il faut réfléchir sur un chemin parcouru, cette fois en épistémologue qui se veut externe à l'acte scientifique.

Autrement dit, dans ces II^{e} et IIIe parties, j'essaierai de comprendre en quoi l'Analyse de Fourier n'est pas un prolongement technique du Calcul lancé par Leibniz et Newton, et aménagé par Euler, Lagrange, Cauchy et Weierstrass sous la forme dite de l'Analyse. Elle est une découverte inattendue, d'ailleurs mal reçue, et difficile à saisir épistémologiquement, voire même seulement interprétable par les développements d'aujourd'hui. Sans radicalement nier ce dernier point de vue, qui vaut pour bien d'autres théories mathématiques, mon propos en m'attachant à quelques objets simples comme celui de fonction numérique est de rendre largement perceptible l'importance de l'Analyse de Fourier et le rôle même de la pensée de son créateur. Ce qui reste paradoxal pour bien des esprits qui affirment que les mathématiques aujourd'hui gomment leur passé dès qu'il dépasse quelques décennies.

En quatrième et dernière partie, je paraîtrai abandonner la physique, quand on l'entend comme l'étude de la nature, en analysant le sens qu'Alan Turing a su donner au mot « incalculable » et qui permet les splendides problèmes sur l'évaluation des performances des algorithmes. Si le meilleur n'est pas possible, cela ne signifie pas que ce qui l'est un peu moins ne soit pas réalisable. Et donc, l'existence même de l'incalculable permet un retour de l'expérimentation. Je prendrai l'exemple de l'algorithme de Louvain pour indiquer comment une idée aussi formelle que celle de matrice, et ses vecteurs colonnes par exemple, permet de justifier des calculs particulièrement performants, rendus possibles par notre emploi des machines. J'aurai pu faire un lien avec l'Analyse de Fourier des IIe et IIIe parties en évoquant les processus numériques performants de la Transformée de Fourier Rapide de la seconde moitié du XX^e^ siècle, ou encore les calculs d'aujourd'hui sur les ondelettes. Mais, cette fois justement, je me limite pour rester au niveau mathématique moyen de ma présentation.

Ayant décrit un parcours bien trop long pour un seul exposé oral, mais dont les parties sont largement indépendantes et séparément lisibles, je ne divise pas en une partie technique ou occasionnelle, voire positive – les cas du calcul - et une partie qui serait philosophique ou théorique. L'avantage d'un recours à l'histoire des mathématiques est précisément de ne pas avoir à séparer pratique et réflexion. Bien sûr que l'historien épistémologue intervient avec sa connaissance du présent lorsqu'il décrit les situations du passé. Mon attitude, pourtant non issue de la logique, s'inscrit dans un genre aujourd'hui appelé le « *practical turn in philosophy of science* »[3] ; elle s'inspire surtout de la démarche de Gaston Bachelard, qui scrute ce que dit le scientifique et s'interroge, un peu dogmatiquement quelquefois, sur ce qu'il a appelé un obstacle épistémologique[4]. Le calcul en serait-il un *a priori* ?

La question n'est pas quelconque, mais on sent bien que le danger est de désigner plusieurs manières ou procédures, même si elles sont algorithmiques, sous la seule appellation de calcul. J'ai suffisamment dégagé bien des calculs du seul genre du Calcul pour ne pas commettre un tel amalgame.[5] Si j'envisage le calcul sous deux aspects de la pratique mathématique - le côté machinal ou automatique et l'aspect expérimental – c'est pour mieux cerner ce qui permet la découverte.

[3] Titre d'un livre de Evandro Agazzi et Gerhard Heinzmann paru en 2015.

[4] Voir son introduction à : *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Paris, Vrin, 4^e^ édition, 1965. La première édition, chez Vrin, est de 1938.

[5] Je précise en dernier lieu que les cas ici présentés sont issus de différentes publications que j'ai pu commettre, et je n'ai pas voulu les reprendre en entier, utilisant seulement des bouts, éliminant ici la plupart des références historiques comme d'ailleurs bien des calculs, même si ici l'accent est évidemment mis sur ceux-ci. Ceux que cela intéresse pourront trouver ces références dans lesdits articles, mentionnés en bibliographie finale.

Ière partie. Des images qui proviennent de calculs en vue de la fonction périodique sinus

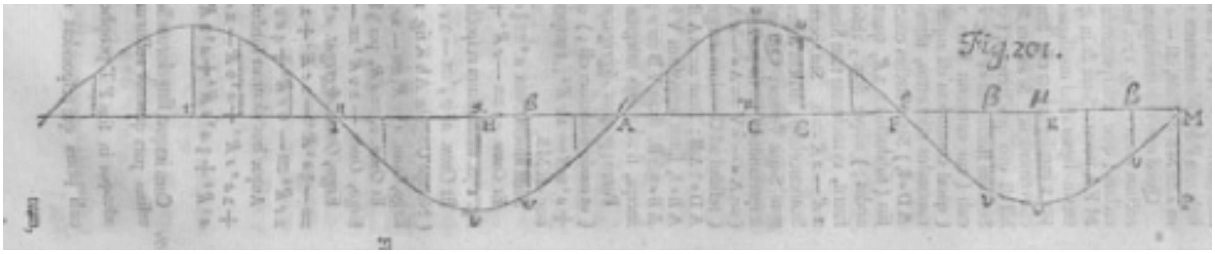


Figure 1.

Est donné ci-dessus (figure 1) ce que nous voyons comme le graphe bien habituel de la fonction sinus, quoique peut-être suggérant plus par la régularité d'espacement de segments verticaux. Il y a là une absolue nouveauté de la représentation. Ce graphe est fourni par John Wallis en 1671, et il souligne avec soin les parties ascendantes et descendantes, comme les valeurs négatives régulièrement prises. C'est une première mondiale pour la périodicité ; elle figure dans la troisième partie de son *De motu*, un ouvrage de mécanique qui a été repris au tome 1 de ses *Opera* en 1695 (p. 883). Dans ce texte, l'allusion est faite à une figure 170 qui réfère à un texte antérieur, et à une figure 7, que nous voyons encore comme le graphe de la fonction sinus verse (voir ci-dessous, figure 2), sur un domaine de variation réduit. Cet autre dessin a été publié en 1659 dans un texte largement consacré à la cycloïde et en réponse à un défi mondial lancé par Pascal l'année précédente, le défi dit de la roulette. Pourquoi n'est-ce pas le défi du sinus ?

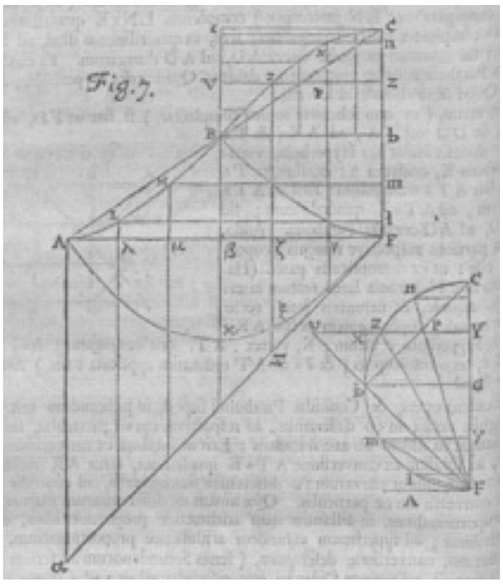


Figure 2.

Si je donne sans les numéroter ces deux images en premier - elles sont j'en suis sûr bien peu vues – c'est qu'elles devraient nous étonner. La fonction sinus n'a pas été représentée plus tôt, et certainement pas au cours des longs siècles depuis l'invention du mot pour désigner une longueur géométrique représentable dans un cercle comme on le sait bien. L'invention de cette longueur se perd dans l'Antiquité, et l'expression du « sinus verse », quoiqu'abandonnée de nos jours, est attestée nettement dans le monde indien au moins depuis le VI^{e} siècle de notre ère. Pourtant il n'existe pas plus de figure antérieure représentant la variation du sinus verse. L'image de Wallis - je préfère le mot « image » à celui de figure qui porte une connotation de géométrie euclidienne – ne nous paraît aller de soi que par erreur !

Force en particulier est de constater que le sinus n'est pas venu comme graphe en premier de la périodicité, mais un intermédiaire s'est avéré nécessaire : le sinus verse. Même si le sinus verse n'est ici pas donné pour une période entière. Ce pourrait n'être qu'une péripétie si l'on ne constatait que le sinus verse fut un intermédiaire pour une autre courbe encore, que nous appelons aujourd'hui cycloïde, mais qu'un « professeur royal » en 1637 dénomma « roulette ». Il s'agit de Roberval, Gille Personne de Roberval pour être précis. Et ici commencent les questions qui ne sont pas seulement anecdotiques. Puisqu'aujourd'hui la roulette est nettement moins connue que la fonction sinus

Dès le départ pour la roulette l'idée était celle d'un déroulement infini. Marin Mersenne alors même qu'il prend la courbe pour une demi ellipse, la répète à l'infini. Il le fait dans un gros livre de musique ! Il y revient pour se corriger dans la *Seconde partie de l'Harmonie Universelle: contenant la pratique des Consonances, et des Dissonances dans le Contrepoint figuré…*, publié à Paris en 1637. Toutefois il ne donne pas de figure. Mais au moins trois constructions, dont la première est un enregistrement dont il est déjà question dans le premier volume de *l'Harmonie universelle*, qui parut en 1636. Faut-il s'étonner que la périodicité intervienne en musique, chez un savant qui est le premier dans cet ouvrage à avoir défini la fréquence d'un son ? Je laisse d'abord méditer l'expression adoptée par Mersenne à propos du globe roulant, avant de donner une clef facile par une image moderne de type mécanique, une figure en fait, mais d'un genre nouveau en géométrie en ce qu'elle contient des indications de mouvement.

Mais quand elle roûle, le point d'attouchement, qui la ſouſtient ſur le plan, deſcrit vne demie Ellipſe à chaque tour qu'elle fait: de ſorte que la boule qui fait cent fois la longueur de ſa circonference en roûlant deſcrit cent moitiez d'Ellipſes. Semblablement chaque point de la boule deſcrit des parties d'Ellipſe, comme monſtre l'experience, en faiſant roûler vne poulie, ou quelqu'autre corps rond, dont on marque le mouuement par le moyen d'vn crayon ſur vne ardoiſe miſe à coſté du corps qui roûle vn tour entier.

Figure 3.

Allons : la roulette est cette courbe que l'on peut enregistrer parce que décrite par un point fixe sur un cercle qui roule sans glissement sur une ligne droite horizontale. Aujourd'hui, par l'image ci-dessous (figure 4) on représente immédiatement ce qui est écrit ci-dessus (figure 3) par une animation dont je ne donne que le départ et qui oublie certes l'aspect physique d'une boule à trois dimensions. Or sa présence à l'origine chez Mersenne est un refus de la part d'abstraction que comporte le traitement usuel depuis Euclide de réduction à la géométrie plane. Ma question, sans doute bizarre, est de savoir en quoi ce refus a-t-il pu permettre le graphe de la fonction sinus qui a été présenté en premier, mais qui vint si tard.

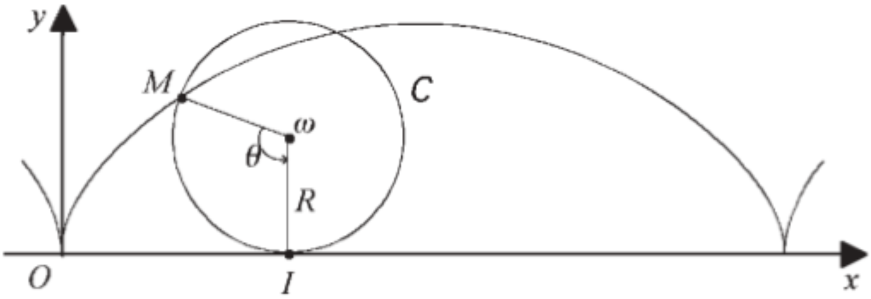


Figure 4.

Malgré l'apparat mécanique et symbolique dont elle est entourée - l'indication des axes avec des flèches et l'indication d'un angle orienté dans le sens contraire au mouvement -, je donne la figure ci-dessus avec une mauvaise intention en tête. Car cette figure, trouvée sur le Net, est fausse ; en ce que la tangente au point courant *M* de la cycloïde, certes non tracée et pourtant imaginable par notre œil, devrait passer par le point diamétralement opposé au point *I* sur le cercle générateur *C*. Ce résultat est attesté en 1638 dans diverses lettres, et Descartes en donne une justification éblouissante. Elle est sans calcul, juste par la considération du point *I* de contact du cercle mobile avec l'axe sur lequel il roule, en l'envisageant comme centre instantané de rotation. D'où il résulte que la tangente en *M* à la roulette est orthogonale en *M* à celle issue de *I* sur *M*, ou encore est la droite qui joint *M* à l'opposé diamétral de *I* sur le cercle. La première construction de la courbe en 1637 ne pouvait en tout cas comporter une telle erreur de figuration ; car comme indiqué elle a été faite par enregistrement mécanique sur une feuille de papier. L'expérimentation au sens de manipulation se donne à voir en premier dans ce qui est pourtant une indéniable mathématisation.

Dès l'apparition de la courbe, de sa première pratique donc, le paramétrage indiqué ci-dessous, avec l'angle θ (thêta), fut de fait utilisé par Mersenne lorsqu'il exprima en 1637 la deuxième construction de la roulette. Je le cite pour cette seule partie, ayant adopté une orthographe moderne.

> En second lieu, par les sinus verses et droits du cercle qui décrit la ligne. Car si on **élève** des sinus verses sur la ligne décrite sur le plan horizontal par la circonférence du cercle, à laquelle elle est égale, et qu'on **applique** tellement aux sommets des sinus verses les sinus droits, qu'ils soient **tirés** à côté gauche et parallèles au plan, la ligne courbe décrite par le cercle passera par toutes les extrémités des sinus droits, comme par autant de points qui montrent la manière de la décrire.

J'écris d'un coup les deux équations paramétriques qui correspondent à cette description, en rappelant le rôle du sinus et du cosinus pour représenter un point dans un cercle de rayon *R* :

$$\begin{aligned} X &= R(\theta - \sin\theta) \\ Y &= R(1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{1}$$

Faisant cela, j'ai dû choisir deux axes de référence, *Ox* et *Oy* dans la figure moderne et les directions sont marquées par des flèches. Mais, en 1637, il n'y avait ni de tels repères, ni de telles écritures symboliques, et l'angle θ ne pouvait pas prendre de valeurs en dehors de l'intervalle compris entre 0 et π. Aujourd'hui nous n'avons aucun mal à accepter des valeurs positives et négatives quelconques, donc à penser la périodicité comme étant inhérente aux expressions en jeu. On se restreignait autrefois à une arche, voire à une demie arche. Mersenne néanmoins procéda à une description verbale particulièrement précise, pour laquelle j'ai juste besoin de rappeler un point de vocabulaire : la hauteur de *M* sur l'axe horizontal, ou ordonnée comme on dit, portait le nom de sinus verse. Son expression est tout simplement donnée par la deuxième égalité du système (1). Que la singularisation de cette ligne trigonométrique remonte à l'Antiquité orientale ne nous apprendra pas grand' chose, mais il importe de savoir qu'il existait des tables numériques de sinus verses : avec la prédominance des sinus et tangentes, elles disparurent vite car redondantes. Ces tables des années 1630 donnent le moyen de construire la roulette, en place de la présentation expérimentale sur un papier : ce qui correspond à une pratique à laquelle il faut associer la formidable théorie que fut le passage par les logarithmes. Pour mémoire en effet, les tables numériques efficaces de la trigonométrie vers 1630 passent par les logarithmes.

Ai-je besoin, devant tous ceux qui ont suivi un cours de mathématiques au lycée, de faire reconnaître que la description de Mersenne correspond à celle du tracé du graphe d'une fonction ? C'est assez simple : on avance depuis 0 d'une longueur égale à celle de l'arc de cercle qui a roulé sur l'axe *Ox*, soit donc le terme $R\theta$, donnant le premier terme dans la première équation paramétrique, et qui correspond aussi bien au segment *OI* qu'à la longueur de l'arc circulaire *MI.* Cette égalité est la traduction du roulement sans glissement, notion qui fait intervenir une conservation d'une longueur. Je la qualifie malgré tout d'abstraite parce que le mot « mathématique » ou « mécanique » n'apporterait rien, alors que je veux souligner l'intérêt d'une longueur courbe mise sous forme de ligne droite. Mais je dois d'abord poursuivre la description donnée par Mersenne, celle du graphe. Il va en hauteur depuis l'horizontale et a bien $R(1-\cos\theta)$, le sinus verse pour la hauteur de *M*, son ordonnée. Il reste à atteindre *M*, et il faut juste retirer $R\sin\theta$ à la longueur $R\theta$ qui est en *OI*. On a l'abscisse et l'ordonnée de *M*. On dispose avec (1) des équations paramétriques de la courbe appelée roulette. J'ai fait attention à souligner les verbes dans la description de Mersenne qui correspondent à un geste (certes virtuel, mais qui a au moins un caractère visuel) de celui qui dessine méthodiquement ce graphe. Pourtant, pas plus que l'écriture symbolique *ad hoc*, les mots, « graphe » ou « fonction », n'existaient dans leurs significations mathématiques au moment où Mersenne écrivait. Et des verbes utilisés, en fait aucun ne subsiste dans le langage mathématique des fonctions d'aujourd'hui. Serait-ce dire qu'il s'agit d'une pratique qui ne se pratique plus ?

Pour le symbolisme, on peut comprendre la difficulté déjà dite. Car le sinus, verse ou non, ne portait que sur un angle sinon aigu, du moins ne dépassant pas un angle plat, et il n'était pas question de parler d'angle négatif. D'où l'absence dans l'écriture d'une idée de périodicité. Et les représentations que nous en avons ne dépassent jamais une seule arche, et plus souvent encore une demi-arche. Je donne ci-dessous (figure 5) celle qui figure chez Evangelista Torricelli en 1644 (*Opera Geometrica Evangelistæ Torricellii*, à Florence[6]). Il n'y a aucune difficulté à reconnaître que la cycloïde, quant à sa forme si on examine de près la tangente, est aussi mal tracée chez Torricelli que celle tirée du Net. Preuve que l'auteur n'avait pas pris le parti d'utiliser le premier « truc » de construction de Mersenne. A moins que ce soit une illustration du fait que les mathématiciens préfèrent réfléchir sur des figures fausses, comme le prétendent les ricaneurs !

[6] Pour ne pas alourdir je ne donne pas les références bibliographiques complètes, et en particulier omet la mention des *Œuvres complètes* des auteurs concernés lorsqu'elles existent. On les trouvera bien sûr dans les articles cités en fin de texte, mais avec les indictions ici données il sera facile de se retrouver sur les mises en ligne sur le Net.

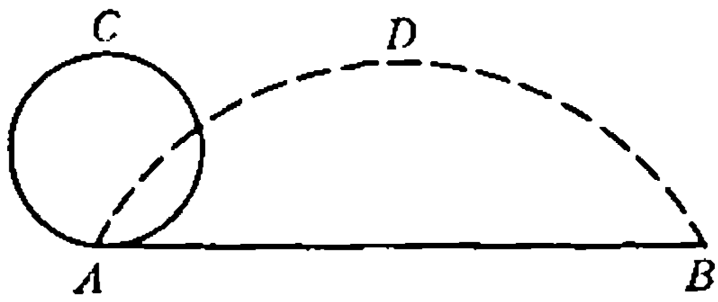


Figure 5. Une figure dessinée par Evangelista Torricelli en 1644 dans *Opera geometrica* (p. 25 de l'original, en appendice du texte consacré à la « mesure de la parabole », qui a sa pagination propre).

L'angle va pouvoir s'étendre, sans doute sous l'influence de l'optique et du calcul des arcs-en-ciel multiples chez Descartes en 1637. Mais je voulais signaler, en passant, que les extensions angulaires ne sont pas venues des mathématiciens. Il fallait cependant un esprit mathématicien pour décomposer le système (1) des équations paramétriques en deux systèmes, et mettre en avant une courbe intermédiaire comme celle dont les équations deviennent :

$$X = R\theta$$
$$Y = R(1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe des sinus verses, et elle peut d'ailleurs s'écrire en tant qu'« équation cartésienne », moyennant la disparition du paramètre angulaire. Avec même un sinus verse qui peut être considéré comme une fonction en soi. C'est ce que nous avons envie de dire, non sans nominalisme il est vrai.

$$Y = R(1 - \cos X/R) = R\mathrm{sinverse}\,(X/R) \qquad (3)$$

Comme c'est justement la question de la fonction qui est un enjeu dans mon enquête, il n'est pas possible de conclure si vite, d'autant que les calculs effectués jusqu'à présent sont juste des descriptions. Mais il faut prendre conscience historique du fait qu'une expression comme (3) ne vint jamais avant les années 1690.

Il est clair que la construction de la courbe du sinus verse était une question dès le début. Et l'on ne pouvait pas se contenter de l'expérimentation que contient un dessin, car c'est la roulette que l'on avait expérimentalement, non le sinus verse. Quelle est l'utilité de cette dernière courbe ? C'est pour nous une sinusoïde, et j'ai bien commencé par donner une image du sinus datant de la deuxième partie du XVII^e siècle, en assurant que c'était une première. Ainsi donc, si c'est avec le passage préalable par cette courbe sinus verse qu'on est arrivé au dessin précis de la roulette, c'est qu'il y a eu découverte d'un moyen de tracer la courbe du sinus verse. Il ne pouvait pas être de type expérimental. C'est par cette même courbe du sinus verse que l'on a compris la sinusoïde, vue en premier chez Wallis. Cela permet certes de mesurer le temps qu'il a fallu pour que le sinus s'impose seul comme fonction phare de la périodicité. Mais qu'en déduire ? En passant, je donne à voir ma façon de procéder à rebours en histoire, en essayant de décaper nos évidences actuelles pour faire saisir les évidences et inventions d'autrefois.

Il nous faut donc maintenant trouver la façon dont cette courbe du sinus verse fut tracée. Je dois passer des détails, car mon propos n'est pas d'érudition. Je vais montrer une figure, qui vient de manuscrits datant à peu près des années 1640, et qui sont reconnus comme étant dus à Roberval. Là aussi je passe les détails d'érudition et les références, et je prends la figure à la page 109 d'une publication tardive à l'Académie des sciences en 1693, portant sur les mouvements composés. Ce sera l'illustration numéro 1 (figure 6). La figure de Roberval établit comment trouver la tangente en un point courant de la courbe du sinus verse. Il y a là quelque chose d'important si l'on veut affiner le seul relevé de plusieurs points à partir du système (1) qui joue des grandes tables trigonométriques publiées dans les années 1630 en Europe qui fournissaient une voie de construction de la roulette autre que par expérimentation par un cercle roulant.

Quiconque, même aujourd'hui, jette un coup d'œil sur la figure ci-dessous (figure 6), voit effectivement quelque chose qui n'est pas de son habitude visuelle. Il y a deux triangles rectangles *TOV* et *RSL*, mais si l'hypoténuse du second montre la direction de la tangente à la courbe du sinus verse, ce qui est objectivement recherché, on ne voit pas du premier coup d'œil comment il est procédé pour dessiner ces triangles[7]. C'est cette absence d'indication qui surprend, et donc interroge le regard. Aucun geste graphique n'est en cause. A la différence notable de ce qu'avait montré Descartes en 1638 avec l'intervention du centre instantané de rotation. Le premier triangle, celui sur le cercle, a bien une hypoténuse, mais si la direction est géométriquement évidente, rien n'indique comment la longueur *RL* est réalisée, d'autant que l'hypoténuse se prolonge n'importe comment sur le bas. Il y a donc un « truc ». En fait c'est un calcul, et c'est le point central de ce que j'essaie de raconter. Nous allons voir comment se présente l'affaire, car elle est au moins éclairée par un texte, dont je redis qu'il peut être situé avant la publication de Torricelli de 1644.

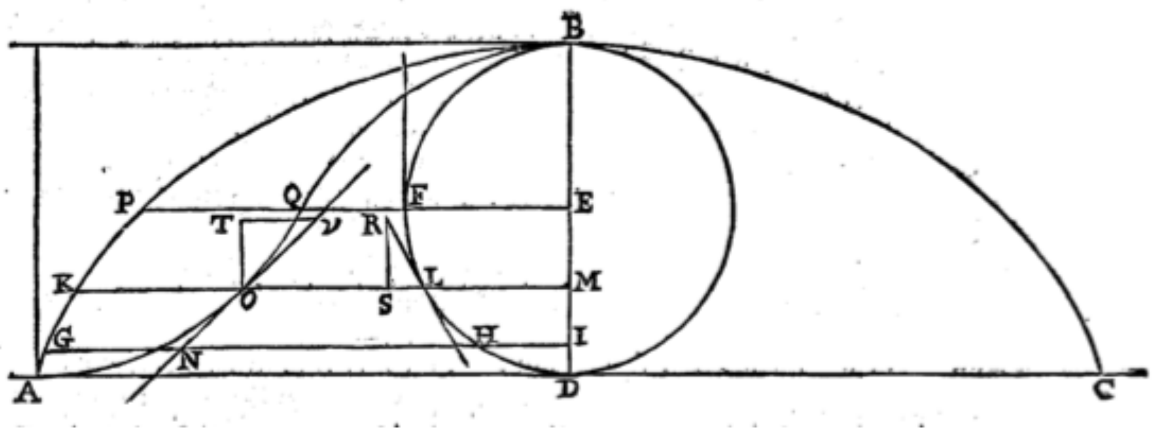


Figure 6. Sur cette figure dont des exemplaires dessinés existent vers les années 1640 chez Roberval (manuscrits non publiés), on distingue tout de suite trois courbes. Celle du cercle central qui a quitté son aspect générique de cercle mobile, la courbe intermédiaire des sinus verses qui n'est pas prolongée par symétrie d'axe *DB*, et enfin la roulette représentée par une demi-arche seulement *AGKPB*. Mais ce qui surprend encore aujourd'hui, ce sont les deux triangles rectangles, écrits si je puis dire. Ce sont, métaphoriquement, comme des anses pour saisir les courbes. Et il est difficile de douter que Roberval n'ait pas volontairement souligné la chose.

Il convient de commencer par lire l'explication originale avec les lettres mêmes de la figure, pour justement comprendre l'intervention du « je » de Roberval, qui s'exprime de façon très générale, mais justifie une construction sur l'exemple de la roulette du premier genre comme il le dit. Cette roulette est définie par l'essentiel qui est la longueur de *AC* égalée au périmètre du cercle, fixant ainsi le

[7] Je dois d'emblée signaler une ambiguïté qui tient à mon utilisation de l'image originale de Roberval (fig. 6) et de la notation analytique du système (1) : il s'agit de l'emploi de la lettre *R*. Elle désigne à la fois un point sur la figure, sommet de l'un des triangles, et le rayon du cercle mobile, figé dans la fig. 6 par le diamètre *BD*.

roulement sans glissement (figure 6). J'en dirai plus un peu plus loin sur les autres roulettes. Et le fait qu'il y en ait d'autres n'est pas seulement dû à l'habitude des mathématiciens d'en rajouter toujours dans la généralité !

Par éxemple, ſoit en la derniére figure cy-deſſus la Roulette A B C du premier genre, c'eſt-à-dire que ſa baſe A C ſoit égale à la cirçonférence de ſon cercle & le reſte, comme il a eſté dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle L R, & je compoſe le mouvement L R de deux R S, S L, dont l'un R S eſt parallele à B D ; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puiſque par la ſuppoſition le point O monte autant que le point L, je tire O T parallele & égale à R S, ce ſera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O ; puis aprés parce que le point O a dans une ligne parallele à A C un mouvement égal à celuy du point L le long de la circonférence de ſon cercle, c'eſt-à-dire un mouvement égal à celuy du point L le long de la touchante L R, ayant tiré T V parallele à A C, & égale à L R, j'auray les directions & la raiſon des deux mouvemens du point O, & partant la ligne O V ſera la touchante de cette ligne au point O ; ce qu'il falloit faire.

Figure 7.

Je retranscris, car il ne s'agit pas ici d'une épreuve de déchiffrage, et je remonte un peu plus haut dans le texte, supprimant malgré tout quelques répétitions. Le lecteur pressé peut aller directement à la partie que j'ai mise en caractères plus gras. J'ai aussi par exception mis des notes pour faciliter la lecture du texte de Roberval.

> D'où il s'ensuit que pour dessiner cette ligne, ayant tiré du point de la roulette des lignes parallèles à *AC*, et si dans chacune de ces lignes à commencer par les points de la roulette, on prend une ligne égale à la portion de la même ligne comprise entre la demi-circonférence du cercle, et son axe, l'on aura les points par lesquels cette ligne est décrite. […]
>
> Cela posé, vous voyez que le point qui décrit cette ligne, en est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégal, et desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se produisant dans les lignes *CD, DB*, ou dans leurs parallèles.
>
> Et pour ce que le point qui décrit cette ligne se montre de la même façon que celui qui, dans la roulette, monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque[8] dans le demi-cercle et composant le mouvement dont elle est la direction des deux mouvements droits, l'un parallèle à *AD*, l'autre à *BD*, on aura dans la ligne parallèle à *BD* la quantité du mouvement qui fait monter ce point ; et sachant la raison de la base *AC* à la circonférence du cercle[9], puisque le point qui dessine la compagne de la roulette est porté d'un mouvement uniforme égal à *AC*, comme le point qui dessine la roulette a un mouvement uniforme égal à ladite circonférence, si on fait que comme la circonférence du cercle est à *AC*, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne

[8] Le point dit réciproque du point courant *G* de la roulette, ou *N* de la courbe des sinus verses, est le point *H* du cercle. Là aussi se fait l'apprentissage du maniement des ordonnées et des abscisses. On voit d'ailleurs deux tracés généraux sur la fig. 6, selon des propriétés d'orthogonalité faciles à repérer avec *KL* et *GH* ; Le *V* du texte correspond sur la figure à une sorte de nu grec , à moins qu'on lise un upsilon .

[9] La raison (rapport) va être l'unité en fait parce qu'il y aura égalité de la longueur *AC* au périmètre du cercle (roulement sans glissement, ou roulette du 1er genre). Mais Roberval n'oublie pas qu'il veut considérer aussi les roulettes raccourcies ou allongées. C'est-à-dire pour lesquelles il y a en partie glissement, ou au contraire des sauts.

sera la quantité du mouvement parallèle à *AC* du point de cette ligne compagne, qui est réciproque à celui du cercle auquel on a tiré la touchante[10].

Par exemple soit la roulette *ABC* du 1er genre, c'est-à-dire que sa base *AC* soit égale à la circonférence de son cercle, et le reste comme il a été dit ; pour <u>tirer</u> la touchante de cette ligne au point *O*, je <u>tire</u> au point *L* du cercle réciproque du point *O*, la touchante du cercle *LR*, et je <u>compose</u> le mouvement *LR* des deux *RS*, *SL*, dont l'un *RS* soit parallèle à *RD*. Puis comparant les mouvements du point *O* à ceux du point *L*, puisque par supposition le point *O* <u>monte</u> autant que le point *L*, je <u>tire</u> *OT* parallèle et égale à RS. Ce sera la direction et la quantité de ce premier mouvement du point *O*. Puis après pour ce que le point *O* a dans une ligne parallèle à *AC* un mouvement égal à celui du point *L* le long de la circonférence de son cercle, c'est-à-dire un mouvement égal à celui du point *L* le long de la touchante *LR*, ayant <u>tiré</u> *TV* parallèle à *AC* et égale à *LR*, j'aurai la direction et la raison des deux mouvements du point *O*, et partant la ligne *OV* sera la touchante de cette ligne au point *O* . Ce qu'il fallait faire.

Ce vocabulaire, on le reconnaît, n'est pas le vocabulaire standard en mathématiques, et est objectivement hétérodoxe si l'on adopte la conception euclidienne des choses figurées, où il n'y ni haut, ni bas, ni gauche, ni droite, et où l'on ne « monte » pas. A nouveau un certain nombre de verbes dans ce texte décrivent une action, comme « monter », « tirer » ou même « composer », un dernier mot que l'on utilise beaucoup en algèbre des structures depuis le XX^e siècle (loi de composition) : je les ai soulignés dans le texte pour mieux faire saisir que le vocabulaire fait jouer une disposition spatiale, sans pour autant adopter le langage euclidien des figures. Les deux premières actions correspondent à la description anthropologique déjà donnée par Mersenne sur le graphe d'une fonction, et bien sûr relèvent aussi du dessin. Il n'y a toutefois pas le parti pris de l'abscisse et de l'ordonnée, mais simple description de celles-ci : monter pour aller en ordonnée, donc en verticale à partir d'une abscisse, ou « tirer » pour se déplacer en direction horizontale, lieu normalement de l'abscisse, et tirer à gauche pour dire du négatif. La composition quant à elle est d'une autre nature spatiale, au sens où elle quitte les deux seules possibilités analytiques que sont l'horizontale et la verticale.

Il est aisé de suivre ce qui est expliqué dans le texte ci-dessus en mettant en jeu un angle comme $\theta = LED$, repérable dans la cinquième image donnée. Elle est volontairement numérotée comme ill.1 (fig. 6). Car c'est un vrai début. Et en appelant d'abord *X* la longueur *RL*, d'autant plus volontiers que n'est pas indiquée la façon de la connaître. Un calcul est lancé, à la manière d'une procédure. Dans le premier triangle rectangle, celui qui est associé au cercle, en constatant que l'angle *RLS* à la base n'est autre que θ, et avec les règles trigonométriques de projection orthogonale (voir fig. 6), on dispose de

$$RL = X \; ; RS = X \sin \;\theta \; ; SL = X \cos \;\theta .$$

,

On passe au second triangle rectangle, en commençant par la hauteur *TO*, dont on « voit » qu'elle est égale à *RS*. Le texte explique cette égalité, sur laquelle il va falloir revenir, mais on peut d'abord poursuivre le calcul, ayant obtenu $X\sin\;\theta$ pour valeur de *TO*. On ne voit pas immédiatement, mais le texte le dit, que *TV* est prise égal à *X*. Là aussi, acceptons-le et poursuivons la procédure, soit continuons le calcul. Mais de quoi, et en vue de quoi ? Veut-on connaître la longueur *OV* ? Il est évident que cette longueur dépendra de *X*, que nous ne connaissons pas. N'oublions pas le projet : construire une droite tangente à la courbe des sinus verses au point *O*. Donc il faut connaître l'angle *TOV*. Il n'y a pas à hésiter : cet angle que j'appelle ψ est donné par sa tangente :

[10] Cette phrase indique que le mouvement horizontal du point courant de la roulette (ici en *O*) correspond au mouvement du point *L* sur le cercle.

$$tg\psi = \frac{TV}{TO} = \frac{X}{X\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Il faut remarquer l'essentiel : le résultat ne dépend pas de *X*, car *X* s'élimine quand on fait le rapport. Donc l'angle ψ est connu moyennant une table trigonométrique, tout aussi connu donc que ce qui a permis de construire le point *K* de la cycloïde par les équations paramétriques du système (1), si l'on adopte l'expérimentation de type numérique. Roberval peut estimer le problème de la tangente numériquement résolu, grâce à ce jeu d'une grandeur *X*, quelconque, portée sur la tangente au cercle. Laquelle est évidemment orthogonale à *EL*.

On a quand même un doute : la connaissance de la direction de *RL* paraît bien plus géométrique que celle de la tangente *OV* pour laquelle on doit recourir à un calcul. Mais peut-il en être autrement ? On se doute qu'un nouveau calcul, sur les formules trigonométriques, donnerait ψ à partir de θ. Mais on ferait intervenir des fonctions trigonométriques inverses, non connues à cette époque, et qui ne viendront qu'avec le Calcul. A-t-on vraiment envie de faire cet autre calcul ? D'autant que, dans l'antépénultième calcul, il nous reste à comprendre pourquoi on a pris *TO= RS*, puis *TV= RL*. Une deuxième fois je vais jouer avec la donne historique, mais pas à la façon de celui qui n'avance que lorsqu'il sait où il va.

Ces deux égalités de longueurs peuvent s'interpréter moyennant l'imagination, ou la fiction, d'un déplacement du point *L* sur le cercle, sur une courbe donc, qui est assimilé à un déplacement des coordonnées de *L*. On va considérer que le point *L* bouge virtuellement sur la tangente bien déterminée au cercle, d'une quantité *X* justement, non précisée et qui fixe le sommet *R*. Avec l'idée que les bougés correspondants, respectivement donnés par les longueurs *RS* et *SL* en horizontale et en verticale dans le triangle rectangle, correspondent exactement aux variations des longueurs dues à ce virtuel du point *L* se déplaçant sur une tangente et non sur un cercle. Je pourrais aussi bien employer le mot « déplacement ». Peu importe en fait ! Nous sommes au point crucial de la découverte. Le processus mental est un passage d'une expérimentation à une notion mathématique qu'est la conservation de la longueur, dite par le roulement sans glissement. Il nous faut un temps d'arrêt. Car nous ne pouvons pas lire comme si nous ne savions pas déjà le calcul différentiel, le maniement des fonctions, etc.

Notre connaissance actuelle consiste évidemment à remplacer le *X* quelconque de la longueur RL par un R $d\theta$ qui tienne compte du paramétrage des courbes, ici le paramétrage du simple cercle selon le système (2). C'est-à-dire que nous impliquons le savoir qu'une courbe soit donnée par deux fonctions pour chacune des coordonnées, chacune dépendant à sa propre façon d'un seul et même paramètre, l'angle θ. En plus le vocabulaire de différentielle ou d'infinitésimale n'existe pas à l'époque de Roberval. Et je ne pense pas qu'il faille l'introduire en pointillés. Pas plus que d'ailleurs n'est dénommée la manière dont use Roberval, et dont je dois pourtant rendre compte. Il invente en effet le moyen de rendre indépendantes les deux coordonnées, alors même qu'elles sont liées justement par le fait d'être sur une même courbe ; nous assistons à la manifestation de la séparation qui permet un calcul. Cette fois, je n'hésite pas à nommer d'un vocabulaire toujours actuel l'objet en jeu – ce sera la fonction numérique d'une variable – et la méthode – ce sera l'analyse de telles fonctions.

Reprenons les choses, en relisant ce court texte. Je remarque, en passant encore, que l'histoire des mathématiques oblige à un côté monomaniaque, comme l'archéologie ou la paléontologie : ce sont de minuscules éléments qui donnent à beaucoup penser. La fiction du déplacement de *L* sur la tangente et non sur le cercle, implique un double déplacement en horizontale et en verticale. La longueur *MD*, une hauteur du point *L* sur l'horizontale, connaît le déplacement virtuel selon *RS* ; la longueur *LM*, qui se voit sur l'horizontale, connaît le déplacement *SL*. Ces deux déplacements, construits à partir des projections orthogonales de l'hypoténuse *RL*, composent évidemment le déplacement oblique suivant *RL*. Mais chacun de ces deux déplacements virtuels, et orthogonaux en direction, c'est-à-dire sur les deux axes, sont imaginés comme l'effet de chacune des deux « équations » - telle était l'expression d'alors - des deux coordonnées du système (1). Autrement dit, quoique sans ce vocabulaire, *ML* et *DM*, sont traitées comme des fonctions numériques : ce sont des longueurs qui dépendent du seul paramètre angulaire, dont les variations sont évidemment calculables séparément par le biais des projections. Elles sont donc - telle est l'observation du lecteur d'aujourd'hui - conçues comme intrinsèquement liées aux longueurs correspondantes, et le calcul peut être utilisé séparément en verticale et en horizontale, adapté en d'autres circonstances à d'autres courbes. La méthode s'offre comme une généralité, alors même qu'elle part du particulier d'une courbe comme le cercle. Actons cela.

Ce processus se poursuit quand on passe au second triangle, celui qui fige sur la courbe des sinus verses. Telle est la valeur opératoire du processus que j'ai qualifié de fonctionnel. En ajoutant le mot « numérique » et l'idée d'une seule variable. Puisque le point 0 est à la même hauteur que le point *L*, ou le point *M*, et maintenant il suffit de dire que ces trois points ont la même ordonnée, qui dépend du paramètre angulaire. Ainsi donc la longueur *TO* est égale à la longueur *RS*, laquelle vaut par la projection précédente sur le premier triangle : $T0 = RS = X \sin \theta$. Il faut de même passer au déplacement horizontal du point *0*. Il se lit bien sûr sur la figure par *TV*, et cette longueur est prise égale à la longueur *X*. La figure 6 est d'ailleurs correcte au millimètre près, contrairement aux figures non numérotées précédentes. La première justification qui vient à l'esprit est bien sûr celle par le roulement sans glissement du cercle sur l'axe qui génère la roulette. Ce qui est un retour à l'origine mécanique de la courbe. En l'occurrence pourtant, le geste analytique de Roberval est de seulement travailler sur la première équation du système (2). Celle qui fait mettre « l'équation » - et c'est pour cela que j'ai adopté l'expression de fonction numérique d'une variable ici – en R θ , qui est en tant que fonction la valeur de la longueur de l'arc circulaire *DL*.

Nous avons aussitôt envie de dire qu'ici en l'occurrence les choses sont plus simples, puisqu'au fond l'abscisse du point *O* est exactement le paramètre angulaire, multiplié toutefois par le rayon *R*. Et nous préférons donner le nom de fonction à ce qui exprime l'ordonnée de *O*, qui est justement la fonction sinus verse. Ou plus exactement qui s'exprime par la seule expression (3). Autrement dit, nous voulons précipiter les choses au point de prendre conscience de ce qui est fait, en voulant même que Roberval exprime mieux ce qu'il travaille, et au fond dise la façon dont nous le comprenons avec notre usage d'aujourd'hui, tant des fonctions que des variables. Bref, nous voudrions que Roberval justifie sémantiquement ce qui fut son analyse de la situation du système (1). C'est en tout cas une analyse. Car il a décomposé en deux systèmes, le (2) déjà fourni et le (4) ci-dessous, qui n'est autre que le système paramétrique donnant le cercle :

$$\begin{aligned} X &= R \sin\theta \\ Y &= R(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad (4)$$

Ayant obtenu *TO* et *TV*, il est facile de construire l'hypoténuse du triangle rectangle en *O*, qui ne peut que donner la tangente à la courbe des sinus verses. C'est ce qui était cherché. Cette attitude est excellente ; elle est celle de l'enseignant qui veut utiliser Roberval pour faire comprendre. Elle n'est pourtant pas celle de l'histoire. Parce que le système (1) a été analysé en deux systèmes (2) et (4), nous voudrions que Roberval ait pris conscience que (2) soit plus « simple » que (1). Ce que Roberval donne à voir et à lire est que (1), la cycloïde ou roulette équivalente à ses deux équations paramétriques, est la synthèse, au sens additif, de (2), la courbe des sinus verses que nous voyons comme une fonction pure, et de (1), le cercle dont nous ne voyons pas qu'il est sous forme paramétrique aussi compliquée que (1). Mais on connaît la tangente au cercle, et elle s'exprime par un triangle, sur lequel peut s'enclencher un calcul. La connaissance d'une tangente à une courbe permet d'autres tangentes. Le calcul par les triangles est performatif.

Peut-on s'étonner que Roberval n'aille pas plus loin dans l'écriture de cette tangente à la courbe des sinus verses, et n'en cherche pas la pente ? C'est-à-dire ne calcule pas un quotient, celui qui paraît le plus simple à savoir le quotient de *TO* par *TV*, soit exactement sin θ. Que Roberval écrirait certainement comme quotient de *Rsin θ* par *R*, voire de *Xsin θ* par *X*. Car, à cette époque, le sinus ne se conçoit pas sans le rayon d'un cercle, qui est une longueur. Il n'existe pas de sinus pur. Mais ce quotient est exactement la tangente au sens trigonométrique de l'angle *LOV*. Un calcul donnerait la liaison avec le paramètre angulaire choisi, confirmant la détermination de la tangente par le procédé robervalien. Mais qu'en pourrait-on faire d'autre ? Voudrait-on que Roberval ait obtenu la dérivée de la fonction sinus verse, puisque de toutes façons il n'a pas de telle fonction ! Par effet de rappel, il est bon de revoir la date des deux premières images montrées dans mon récit. Mais on peut sans gêne dire que Roberval n'a pas donné à son calcul le sens d'une découverte, ni le lien qu'il aurait pu faire en analysant mieux le passage d'un triangle à l'autre. La réussite d'un calcul aurait-elle empêché de voir le Calcul ! En le disant ainsi, serait-on très loin de l'obstacle épistémologique ?

Il n'est pas mauvais de désigner d'un nom la démarche de Roberval sur une courbe, avec son invention des *triangles robervaliens*. Sur lesquels des calculs sont possibles à partir des côtés. La seule observation de la figure 6, celle de 1693, ne permet pas de passer directement au *triangle robervalien* au point courant de la cycloïde elle-même, mais on peut opérer de façon analogue au cas du sinus verse. Cette fois, je donne une autre image (figure 8). Elle part d'une figure de Fermat, sur laquelle j'ai ajouté, à la main, de indications angulaires de la géométrie pratiquée à l'école, et même une égalité de longueurs dans le losange sur la gauche

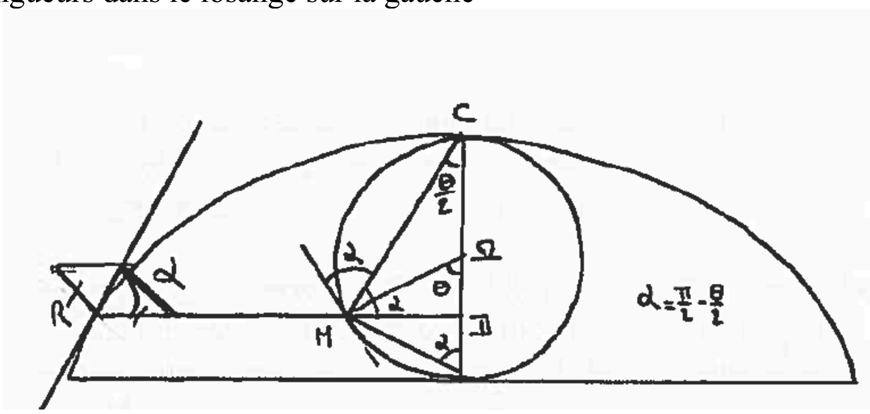


Figure 8. Placement des angles sur une figure prise de chez Fermat, dans ses *Opera* publiées en 1679, lequel assure qu'elle vient de Roberval.

Restant d'abord avec la figure 6, on peut en horizontale au point courant *E* de la cycloïde retrancher à la longueur *TV* d'un des *triangles robervaliens* l'autre longueur *SL*, qui correspond justement à la variation de la longueur *LM* dans le bougé fictif de *L*. Le retranchement correspond à ce que Mersenne, dans sa description des équations paramétriques de la cycloïde, exprimait par un placement à gauche, allant ainsi vers une notion d'axe orienté, ce que le mouvement tendait à faire, mais qui passe ainsi en valeur de type géométrique. De telle sorte que les deux composantes du *triangle robervalien* de la cycloïde, en horizontale la longueur *TV –SL*, et en verticale toujours *TO*, font la direction de la tangente à la cycloïde. Comme ces différentes longueurs sont exprimables à partir de l'angle θ par les fonctions trigonométriques (utiliser ici la fig. 8), le calcul s'installe, comme dans toute géométrie analytique. Ainsi le rapport de *TV-SL* (= X -Xcos θ) à *TO* (= Xsin θ), d'où par nature du rapport disparaît X. Soit $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$, pour la tangente de l'angle d'inclinaison de cette tangente sur la verticale, qui est l'un des axes du repère classique. N'oublions pas plus le but de ces calculs : trouver la direction de cette tangente à la courbe. Deux transformations très simples sur les lignes trigonométriques

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

fournissent effectivement pour ce rapport la valeur $tg\frac{\theta}{2}$. Et donc l'angle *MCD* est la moitié de l'angle θ. N'est-ce pas là la seule présence du calcul ? Mais c'est l'interprétation seule qui compte.

Ce calcul permet le tracé de la tangente à la cycloïde comme bissectrice de l'angle *AMD*, ou comme parallèle à la corde *CM*. On rend aussi compte de la construction toujours associée au nom de Roberval, d'un losange sur l'horizontale et sur une parallèle à la tangente au cercle générateur dont la diagonale donne la tangente à la cycloïde (voir figure 8, à côté du point *R*). En aparté, l'historien doit ici une précision : Roberval n'effectue aucun calcul trigonométrique, contrairement à ce que j'ai fait. Il travaille à partir d'égalités de triangles rectangles : mais c'est encore du calcul, certes de type géométrique, mais sans que le raisonnement géométrique ait un rôle à jouer. Le calcul trigonométrique, alors, avait mauvaise presse, comme un surplus de données postulant que l'on pouvait parler du périmètre du cercle comme d'une longueur comme les autres. Tous les calculs ne sont donc pas ressentis comme étant du même genre. Donc un calcul fait partie du mode selon lequel « vivent » les mathématiques.

Je remarque aussi que si les calculs sur les triangles rectangles ne font absolument pas intervenir les propriétés de la dérivée des diverses fonctions en jeu représentées toutes par des longueurs géométriques, on les retrouve *stricto sensu* si on dispose de cette dérivation aussi bien pour le sinus verse que pour le sinus droit. On se doit donc d'analyser les deux seules propriétés intervenues sur les longueurs en jeu dans les *triangles robervaliens*. Voilà comment une démarche d'histoire débouche sur une enquête épistémologique de l'innovation, et dans le déroulement de cette démarche, on n'a pas besoin d'avoir l'œil fixé sur le Calcul à venir.

D'une part, effet du repérage orthogonal, il y a l'indépendance entre les *éléments* en verticale et en horizontale des *triangles robervaliens*. Je pourrais certes maintenant parler d'*infinitésimales,* un anachronisme pour désigner les côtés selon les axes du repère classique des *triangles robervaliens*. Ce qui reviendrait à considérer ces *infinitésimales* comme des variations sur des longueurs. Je préfère le mot *éléments*, car intervient l'idée d'êtres géométriques soumis à ne valoir que par les proportions qu'ils entretiennent. En particulier, ce sont des segments ayant une longueur, sans avoir à penser à la fiction plus difficile encore d'un infiniment petit. En envisageant des variations, le nom de fonction numérique d'une variable réelle, anachronique certes pour cette époque, doit effectivement être prononcé. Il y avait plutôt une « équation » avec le paramètre angulaire, dont j'ai déjà dit que le caractère de nombre réel était à cette époque incomplètement assumé. Je reconnais ne pas être suffisamment clair, à la façon dont on pourrait l'être aujourd'hui. Mais justement comprendre un passé, ce n'est pas en faire le signe indiscutable d'un avenir

En résumé, le fait de base, celui du paramètre, devient l'intervention de *RL*, la longueur d'arc circulaire, qui d'hypoténuse dans un *triangle robervalien* associé au cercle est reportée en horizontale pour permettre un autre *triangle robervalien* pour le sinus verse. Cette longueur est-elle pour autant conçue comme la variable ? Je ne pense pas qu'il y ait une différence de nature avec le cas général des équations paramétriques, donc de deux fonctions en abscisse et en ordonnée. Le plus important est le caractère additif (au sens large qui est ici une soustraction) qui est requis pour ces *éléments* mis à l'horizontale lorsqu'ils portent sur des « fonctions numériques » différentes. Voilà ce qui permet d'envisager *TV-SL*, où il y a un *élément* d'abscisse curviligne et un autre, *SL*, portant sur la « fonction » sinus que l'on voit en *LM*. Du point de vue analytique, l'additivité des *éléments* annonce, pour nous, le caractère additif des différentielles aussi bien que celui des dérivées. Pour Roberval, il s'agit d'une règle de calcul par composition sur ses *triangles*.

L'idée d'une fonction numérique d'une variable réelle suffit à comprendre d'une part la nature d'une courbe en la construisant (les équations paramétriques) et d'autre part à construire les tangentes. Du moins quand on connaît les variations ou bougés de chacune des fonctions numériques portées en horizontale ou en verticale. La construction de Wallis de la courbe du sinus donnée au tout début s'en déduit. On peut certes reprocher à Roberval de n'avoir pas tenté de lister les quelques fonctions connues, au-delà du sinus verse ou du sinus, pour indiquer ce jeu de composition, mais pour autant il n'en aurait pas déduit le Calcul. Il n'avait pas la relation entre intégration et différentiation. Ainsi je peux au final corriger une exclamation précédente sur le calcul et le Calcul, et refuser l'idée trop séduisante d'un obstacle épistémologique. Par contre, on comprend le ton moqueur de Descartes qui, d'une seule remarque géométrique sur le centre instantané de rotation, règlait la question de la tangente à la roulette. Cela a pu ulcérer Roberval, qui à juste titre n'en maintint pas moins son calcul et son travail sur les fonctions numériques.

Puisqu'il n'entre aucune idée d'approximation, ou de passage à la limite, pourquoi faut-il poser la question de l'origine des *triangles robervaliens* ? Même si on sait que le professeur lucasien Isaac Barrow est crédité de la terminologie de triangle caractéristique en 1670 seulement, elle ne peut pas avoir influencé Roberval. Cette notion de triangle caractéristique allait se trouver chez Leibniz, qui lui-même la tenait de sa lecture de manuscrits de Pascal, lequel réservait pourtant la chose au cercle. C'est effectivement par le cercle que Roberval avait débuté dans l'exemple que nous avons choisi pour le tracé de la tangente à la « compagne de la cycloïde », nom d'alors pour la courbe des sinus verses, marquant le peu d'attention pour le sinus, avant du moins le tracé de Wallis. Nous savons certes que Leibniz a lu ces manuscrits de Roberval, et qu'il y avait circulation en Angleterre. Mais il y a encore loin entre ce que Roberval peut avoir fait et le Calcul. Par contre, il peut paraître évident que la seule vue de ces triangles put donner des idées, aussi bien à Newton qu'à Leibniz, surtout si les deux auteurs avaient déjà tourné autour de tels faits. Plus précisément, Leibniz et Newton n'ont-t-ils pas saisi l'occasion de ces « mouvements composés » pour penser les variations des seules fonctions numériques d'une variable réelle ?

J'avais cependant annoncé que l'œuvre de Roberval n'avait pas directement débouché. Mais une chose a été aperçue : le fait que la représentation graphique s'impose avec la fonction sinus chez Wallis. Et se voit chez bien d'autres auteurs. Celle-ci ne pose aucun problème et est admise par tous. Qui plus est, aussi bien la dérivation que l'intégrale, requièrent la représentation graphique fonctionnelle. En ce sens, l'idée de Roberval a effectivement gagné, et elle devrait être pensée comme sa postérité. La question sur les fonctions numériques d'une variable réelle n'est pas évacuée à la fin de mon exposé sous l'effet des *triangles robervaliens*. J'y reviendrai de toutes façons après l'étude d'un autre cas, celui des séries de Fourier. J'assure pourtant que je n'établis pas un hiatus dans cet exposé, et l'indique dans le titre même de la seconde partie.

IIème partie. Des « sinus mis ensemble » et le jeu d'orthogonalité déjà vu avec les *triangles robervaliens*

Je prends par un tout autre biais le sujet de cette deuxième partie, qui fera tout autant intervenir des calculs. Je discute les résultats de Fourier qui concernent la propagation de la chaleur, c'est-à-dire qu'en comparaison avec l'exemple précédent, je me place après la venue du Calcul différentiel et intégral, alors que Roberval se situait en mécanique, et ainsi en amont du Calcul. Et je veux donner à comprendre l'intervention chez Fourier vers 1807 des "modes propres". Cet aspect est rarement souligné chez les épistémologues. En l'occurrence ce seront seulement les fonctions sinus des angles multiples entiers d'un angle donné, donc utilisant directement la forme obtenue par Roberval et Wallis. Mais chez Fourier le sinus apparaît d'une tout autre manière fonctionnelle, comme solution inattendue d'une équation différentielle. Etonnamment, elle va permettre la représentation de toute fonction périodique, alors que l'exemple précédent, avec la cycloïde, montrait le sinus comme découverte de la périodicité.

La question épistémologique du couple de l'analyse et de la synthèse - comme trouver un exemple du périodique et en faire le fond du périodique -, c'est-à-dire la question de la place de ce couple comme un outil de science, reste essentielle[11]. Sans céder au vertige de la mise en abîme - l'analyse de la synthèse de l'analyse... - c'est dans son jeu de transformations que se mesure l'épaisseur de ce couple. Et donc que peut se comprendre son efficace de représentation de la mathématique elle-même dans son acte d'invention, même lorsqu'il s'agit de découverte physique, en l'occurrence celle de la propagation de la chaleur. Maurice Blondel explique que cette dualité ne peut pas se résoudre. En tout cas, elle ne peut pas se résoudre par les moyens des sciences seules.

> Dans leur travail d'intégration continue, elles [les sciences] font constamment appel à un procédé synthétique seul capable de leur fournir une matière qui soit pour ainsi dire toute formelle ; mais cette initiative même de la pensée leur échappe ; elles sont étrangères chez elles. Dans ces sciences où tout semble pénétré de lumière et où la distinction des idées parvient à sa perfection, le ressort de la science n'est pas de la science. Ce qu'elles connaissent, elles ne le **connaissent** pas tel qu'elles **le** connaissent.[12]

Je veux reformuler cette pensée de Blondel, qui au final ne tient pas compte de ce qui fait l'invention en science, ou plutôt l'insertion de l'invention comme acte scientifique. Je veux ici montrer que l'analyse ne peut aller sans synthèse pour qu'il y ait du nouveau reconnu comme tel. Et ici puisque du rôle du calcul il est question, j'entends montrer comment peut faire sens l'étranger, pour reprendre l'expression de Blondel, qu'est le résultat inattendu d'un calcul. Je vais le faire pratiquement en m'intéressant à ce que Joseph Fourier met en jeu dans la *Théorie Analytique de la Chaleur*, et en revenant à un texte original, je ne prends pas le court-circuit usuel d e l'enseignement des séries de

---

[11] Un historien de la philosophie perçoit différemment les choses, et pose plutôt la question de la place du couple analyse/synthèse dans le questionnement sur la mathématique elle-même.

[12] M. Blondel, *L'Action, Essai d'une critique de la vie et d'une science de la pratique*, texte de 1893, Paris, PUF, 1950, p. 61. Parce que Blondel répond par une opposition, en réfutant la possibilité d'une clarté de la science sur elle-même, il faut rappeler l'autre point de vue extrême de Kant qui, dans la *Critique de la faculté de juger* énonce : "...Newton pouvait rendre parfaitement clairs et déterminés non seulement pour lui-même, mais aussi pour tout autre et pour ses successeurs, tous les moments de la démarche qu'il dut accomplir, depuis les premiers éléments de la géométrie jusqu'à ses découvertes les plus importantes et les plus profondes" (*Œuvres philosophiques de Kant*, Gallimard, La Pléiade, t. 2, § 47, p. 1091). Si cela était vrai, on se demande pourquoi il fallut attendre plus d'un siècle après les *Principia* de Newton pour que quelqu'un s'avise de leur clarté.

Fourier. Par l'adjectif, Joseph Fourier qui publie son ouvrage en 1822 chez Didot, affiche l'analyse en titre, et pourtant elle se double d'une synthèse. Celle de faire paraître la propagation de la chaleur comme une phénomène ondulatoire amorti. Contrairement au cas de la roulette chez Roberval qui analysait de façon visible en décomposant les équations, je dois d'abord déconstruire l'analyse de Fourier en suivant ses calculs ; cette analyse part de quelque chose de tout autre que la conservation de longueur que représentait le roulement sans glissement, lequel a permis l'établissement des équations paramétriques de la roulette (le système (1)). Le nouveau se trouve cette fois dans les modes propres, liés certes à une équation, relativement compliquée puisqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles. Comme les mathématiques en jeu sont un peu techniques, j'essaie de faire passer en note tous les justificatifs que sont les formules. Mais il faudra prendre conscience que les modes propres sont obtenus par un calcul, et non par une intuition.

En dotant la chaleur de son concept phénoménologique mathématisé, le flux, qui est l'analogue de la vitesse en mécanique du roulement et son exact équivalent mathématique selon l'opération de dérivation, et déduite d'un bilan thermique lui fournissant l'équation aux dérivées partielles de la chaleur qui est nécessairement du second ordre en variables d'espace, Fourier réalise dans son ordre le programme newtonien, d'abord exemplifié par l'équation différentielle du mouvement résultant de la loi d'attraction des masses[13]. Le flux est bien sûr un concept physico-mathématique. Auguste Comte explique en 1830 cette similarité d'intention et de réalisation des deux grands savants, Fourier et Newton.

> Je ne crains pas de prononcer, comme si j'étais à dix siècles d'aujourd'hui que, depuis la théorie de la gravitation, aucune création mathématique n'a eu plus de valeur et de portée que celle-ci, quant aux progrès généraux de la philosophie naturelle[14].

Fourier explique quant à lui :

> Les théories nouvelles expliquées dans notre Ouvrage sont réunies pour toujours aux Sciences mathématiques et reposent comme elles sur des fondements invariables ; elles conserveront tous les éléments qu'elles possèdent aujourd'hui, et elles acquerront continuellement plus d'étendue[15].

Fourier polissait depuis plus de quinze ans les différents aspects de son travail : "Considérée sous ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même..." avance-t-il dans son Discours préliminaire à la *Théorie*. Privilégié, totalitaire même, le mot analyse reste pourtant sans définition : c'est Darboux qui, dans l'édition des *Œuvres* de Fourier vers la fin du XX^e^ siècle, éprouve

---

[13] Avec des constantes physiques *K, C*, et *D*, du corps dans lequel se déploie la chaleur, l'équation prend la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

où *T (x,y,z,t)* est la température au point *(x,y,z)* et au temps *t*. Cette équation est le noyau dur de la théorie de la chaleur de Fourier. On pourrait même décrire la nouvelle analyse au temps de Fourier comme tout ce qui est nécessaire pour en développer les solutions, si du moins Fourier avait été compris des contemporains. En fait il faut faire intervenir une seconde équation pour tenir compte des phénomènes de diffusion qui se produisent à la frontière du corps.

[14] A. Comte, *Cours de philosophie positive*, Paris, 1830 ; édition critique par M. Serres, F. Dagognet, H. Sinaceur, *Philosophie première. Cours de Philosophie positive*, Leçons 1-45, Hermann, Paris, 1975, p. 513.

[15] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, F. Didot père et fils, 1822, Introduction, p. XXVIII. Introduites par T.A., les références à la *Théorie* le seront à l'édition des *Œuvres de Fourier* éditées par G. Darboux, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1888, avec cependant l'indication du numéro de paragraphes, pour permettre aussi bien le repérage dans l'édition originale qui a fait l'objet d'une reproduction (Paris, Gabay, 1988).

le besoin d'ajouter dans cette phrase la majuscule disciplinaire (Analyse). Comme une sanction historique, mais Darboux a raté quelque chose. Car il ne voyait en Fourier qu'un sous-Cauchy ou un sous-Gauss, certes véritables fondateurs sur les questions de convergence ou de résolution d'équations différentielles. La conclusion de Fourier à sa *Théorie analytique* apporte une information de poids. Il dit qu'objet majeur de son travail, il n'a pas choisi de dériver d'une même forme les diverses intégrales de l'équation de la chaleur selon les cas inventoriés de solides traversés par la chaleur. Car les "transformations exigent de longs calculs et supposent presque toujours que la forme des résultats est connue d'avance"[16] explique-t-il. C'est affirmer au terme même de son travail qu'il n'a pas suivi l'analyse lorsqu'elle part de ce qu'il faut atteindre. C'est dire que les calculs déjà faits aident à traiter les cas suivants. Fourier est un auteur de choix lorsqu'il s'agit de saisir le rôle d'un calcul en physique mathématique.

Histoire des pensées/histoire des objets, - ici les objets sont les modes propres et les pensées leur composition en séries dites de Fourier -, ou encore histoire des mentalités/histoire des représentations, ces couples dialectiques sont anciens dans la construction scientifique. L'oscillation qu'ils peuvent impliquer constitue l'une des difficultés majeures de l'histoire des sciences elle-même prise comme genre intellectuel. Parce que l'on risque de ne pas voir comment un couple se défait. Ici, avec analyse et synthèse chez Fourier, c'est le moment du balancement du chiasme qui doit nous occuper. Car ce qui est nouveau apparaît dans un mouvement à la fois inattendu et préparé. L'affaire ici est donc différente de celle précédente où l'on examinait l'invention avec les *triangles robervaliens* d'un calcul sur les fonctions numériques, et on restait dans un monde d'objets mathématiques. Terminant une section "dont l'objet appartient presque entièrement à l'Analyse", et évoquant les solutions d'une équation différentielle, Fourier la qualifie hardiment *d'équation du phénomène*. Parce qu'elle représente "de la manière la plus distincte l'effet naturel... C'est cette condition principale que nous avons eue toujours en vue"[17]. Il estime donc qu'il n'y a aucun intermédiaire entre la pensée mathématique et le réel ; il n'y a recours à aucune "fiction" qui, au risque assumé d'une faille logique, permettrait de rendre compte de l'adaptation de cette pensée. Il n'y a non plus rien qui serait caché sous le calcul. La solution obtenue ne peut donc pas être un artéfact, pas plus d'ailleurs que sa façon de l'obtenir ne saurait être une astuce. C'est ce que veut signifier le mot « propre ». Voyons comment il le met à l'œuvre, et en quoi analyse et synthèse sont toutes les deux requises dans un jeu où le calcul prédomine.

II.1 Les modes propres

Tentée par Fourier, la voie qu'indique le mot « propre » est effectivement d'établir une stabilité pour l'équation aux dérivées partielles entendue avec toutes les conditions qui l'entourent. Pour l'expliquer, il nous faut entrer dans une des figurations que cet analyste présumé donne avec parcimonie (ill 3). Il envisage la traversée d'une lame rectangulaire *BDEC* par la chaleur venant par *DE* - le problème est mathématiquement plan, réglé donc par deux variables d'espace, x et y, mais la physique peut imaginer une barre de profondeur suffisamment grande dont les deux côtés latéraux *BD* et *CE* sont maintenus à une température fixe. Celle de la glace fondante n'étant choisie par Fourier que pour faire l'image d'un bloc isolant la lame, l'isolant jusqu'à faire disparaître l'inévitable dilatation que cette lame devrait normalement éprouver. La rigidité de la lame est incontournable. Par contraste avec la coercition latérale, en bas de la lame règne la liberté d'imagination de l'expérimentateur mathématicien. Celle d'imposer une température constante - et c'est par ce cas que le calcul analytique

16 T.A., n° , p. 525.

17 T.A., n° 428, p. 525. On peut alors rapprocher de l'utilisation faite par Newton de l'expression "nature des choses".

débutera - ou encore d'imposer une fonction numérique donnée, c'est-à-dire une ordonnance de valeurs sur l'intervalle *DE*, mais sur cet intervalle[18] seulement parcouru par la variable *y* : c'est donc bien une fonction numérique *f(y)*, compte tenu du choix fait de la variable *x* qui court quant à elle selon l'arête médiane orientée de la lame (et mesure l'éloignement de la source de chaleur). Parce que cela correspond à une étape de l'analyse, le temps n'intervient pas : il est présupposé que le régime est permanent, qu'une stationnarité de la température est établie entre le moufle de glace entourant latéralement la lame, et la donne d'une répartition chauffante à sa base fournie par cette fonction *f* qui est une température, donc une fonction numérique sur l'intervalle indiqué. La température en tout point de la lame est une fonction *F* des seules variables d'espace, *x* et *y* : elle est l'inconnue.

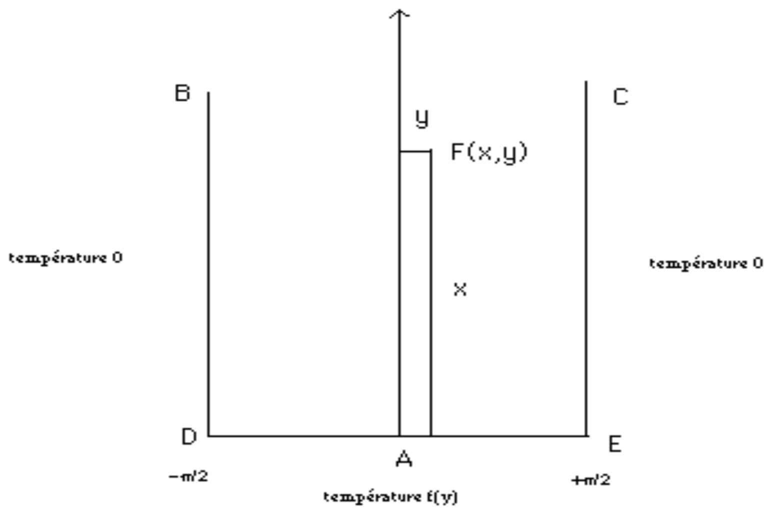


Figure 9. Une lame chauffée à la base *DE* selon une fonction *f* pour obtenir une répartition de température *F.* Pour changer avec les habitudes, et comme Fourier, je prends *x* en verticale et *y* en horizontale. Le choix des bornes est juste une simplification pour l'écriture qui va venir, mais on pourrait aussi bien prendre *l/2* où *l* serait la longueur de la base *DE*.

Pour la déterminer, Fourier établit par la pensée, sans calcul, une relation entre ces deux fonctions, fonction *f(y)* en bas de lame qui est le donné, et fonction *F(x,y)* qui est la température dans la lame, l'objet qui est recherché et d'avance nommé comme en toute bonne analyse. La relation entre *f* et *F* existe physiquement - un seul régime s'établit en effet et il y a d'ailleurs démonstration physique de cette unicité par Fourier[19]. Mais pour les mathématiques Fourier n'avance pas une preuve d'unicité ; elle serait redondante avec celle de la physique. C'est signaler qu'il ne pense pas en termes de déduction axiomatique.

[18] Fourier est sans doute le premier auteur a insister sur le domaine de définition d'une fonction, donc à restreindre le concept même à la donnée d'un domaine. Il est essentiel de noter les deux conditions aux limites portant sur *x* et sur *y*. L'extension par périodicité qui va venir, étendant à l'infini le domaine de définition, est directement liée à ces conditions, qui portent donc l'influence de la forme du corps où se répand la chaleur, ici la lame.

[19] La démonstration de Fourier remonte au modèle physique des échanges de chaleur entre "molécules". Une démonstration analytique de cette unicité, dans ces conditions aux limites, sera donnée après la disparition de Fourier, faisant jouer le carré de la température, à titre d'énergie.

La fonction F est tout à la fois solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se trouve être la nullité du laplacien[20], et elle vérifie en plus les trois conditions suivantes, pour tout x>0, et pour $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$. (On notera à partir de maintenant le jeu sur les inégalités larges ou strictes)

$$F(x, -\frac{\pi}{2}) = F(x, +\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$F(0, y) = f(y),$$

$$\text{Lim } F(x,y) = 0 \text{ lorsque } Lim\ x = \infty.$$

L'association indissoluble des conditions aux limites à l'équation même du laplacien est une des innovations de Fourier, et elle lui a facilité l'appréhension de la correspondance de f à F, alors même que le concept de fonction numérique subissait une transformation à laquelle l'œuvre de Fourier contribue[21].

Les modes propres sont par définition des fonctions numériques f, température mise à la base de la lame, qui redonnent la même fonction, à un facteur multiplicatif près, pour la trace de F sur un segment horizontal quelconque. Ainsi, si l'on pose $cos\ 11\ y$ pour la fonction $f(y)$, pour $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$, l'expression[22] de $F(x,y)$ devient égale à $\lfloor f(y) = \lfloor cos\ 11y$, où $\lambda = e^{-11x}$. Il n'est pas très difficile de vérifier par le calcul la nullité du laplacien et les conditions aux limites. Ce cosinus est bien un mode propre : le caractère oscillant de la fonction f est exactement maintenu pour F en la variable y.

Selon un autre calcul plus élaboré puisqu'il qui fait intervenir la résolution d'équations différentielles moyennant certaines conditions aux limites, les seuls modes propres sont les fonctions $cos\ (2n+1)y$, pour tout entier n positif ou nul[23]. Du moins si l'on ajoute (pour simplifier) une condition de symétrie, celle de la parité de la fonction sur la base *DE*. La lame, pour cette définition des modes propres, reste l'intermédiaire de la correspondance entre f et F ; elle n'est pas seulement objectivée par une équation, elle est une forme géométrique. Comme on constate que la transformation qui fait passer de f à F, que l'on peut noter $F= P(f)$, est linéaire, on voit que les modes propres en f sont les fonctions f telles que $P(f)$, fonction à deux variables, est un multiple de f. Ce multiple est donc en fait une fonction[24] de x. Tous ceux qui ont fait de l'algèbre linéaire, et des matrices, auront reconnu la

---

20 Puisque le temps n'intervient pas, et qu'on a une lame à deux dimensions, l'équation de la chaleur se réduit ici pour la fonction F à la nullité du laplacien : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

21 Ceci participe bien sûr de la constitution de l'Analyse. Que Fourier y contribue n'est pas un hasard : cela fait partie de son projet scientifique comme l'explicite admirablement le Discours préliminaire. Mais son Analyse ne se limite pas au Calcul différentiel et intégral et à la sommation des séries, ni aux fonctions continues. Il en appelle aux fonctions « arbitraires ». Celles qui peuvent survenir dans la nature.

22 On aura compris que les bornes de l'intervalle sur lequel f est définie en y ont été choisies de telle sorte qu'apparaissent aisément les cosinus pour des valeurs impaires de l'entier multiple de y. Naturellement on pourrait travailler avec une longueur l de la base DE, compliquant à peine le calcul fait.

23 Je passe sur le calcul qu'il faut déployer. En imposant la parité de f sur la base *DE,* les habitués reconnaîtront ici le rôle particulier joué par la valeur 0 de la température sur les bords latéraux de la lame. On évite donc l'autre famille, les $sin2ky$, avec k entier,

24 En général, pour $f(y) = cos\ (2n+1)y$, il vient $F(x,y) = \lambda f(y)$, où $\lambda = e^{-(2n+1)x}$.

notion de valeur propre en ce multiple, et en les *f* sous forme de cosinus, les vecteurs propres. Mais conscience historique doit être prise que l'algèbre linéaire n'existait pas du temps de Fourier.

Pour Fourier toutefois, le caractère propre n'est pas encore prouvé. Car le savant sous-entend bien plus quant à leur définition : les modes propres, qui sont caractéristiques de la forme de la lame, doivent en plus permettre de reconstituer par addition toute fonction « arbitraire »[25] *f* qui serait donnée à la base, et donc toute répartition de température (présupposée paire ici). Autrement dit, Fourier « pense » le mouvement de la chaleur dans une lame comme répondant à une infinité de modes propres : la nature de la chaleur serait de répondre à un mode propre par une oscillation amortie correspondante[26], la forme

$$F(x,y) = \lfloor f(y), \text{ où } \lfloor = e^{-(2n+1)x}.$$

Autrement dit, puisqu'il y a une infinité d'entiers impairs, la nature pour répartir une température paire donnée *f* dans la lame entière agirait comme une infinité de lames, chacune indexée par un entier impair, et la température dans la lame serait la somme de ces

$$F_n(x,y)= e^{-(2n+1)x} \cos (2n+1)y.$$

A condition d'ajouter chaque fois un coefficient numérique convenable devant ces fonctions F_n particulières, ou états propres indexés par $2n+1$. C'est par ces coefficients mêmes qu'il y a analyse de la fonction *f*.

Pour Fourier encore, ces coefficients (dits aujourd'hui de Fourier), qui doivent dépendre de la fonction *f*, existent nécessairement. Autrement dit, l'analyse qui a conduit à l'existence d'une infinité de modes propres doit impérativement, selon Fourier et sa conception du mode propre qui est liée à une situation particulière, celle de la lame, fournir une synthèse, celle de la reconstitution par les modes propres de la fonction *f*. Et ce pour toute fonction numérique paire *f* arbitraire, du moins compatible avec les données aux limites, ici l'égalité à 0 aux deux bornes $\pm\frac{\pi}{2}$ en abscisse. Cette assurance ne peut pourtant pas *a priori* garantir que le calcul des coefficients sera facile. La surprise est qu'il le soit au final.

II.2 Les relations d'orthogonalité expliquent au final le succès du calcul des coefficients de Fourier

Fourier n'hésite pourtant pas à se lancer dans un calcul, et commence par le cas de la fonction constante égale à 1 pour $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$, mais que l'on doit prendre égale à 0 pour $y = \pm\frac{\pi}{2}$. On la note *Y*. D'emblée Fourier doit abandonner la continuité de *f*. Non sans hardiesse, il envisage de calculer des coefficients *a, b, c*, etc., des nombres réels donc, tels que pour tout *y* dans l'intervalle dit, on ait :

[25] La pensée moderne, naturellement informée par la théorie des ensembles, ne peut accepter une notion comme celle d'un arbitraire de la fonction et impose une régularité, ne serait-ce que parce qu'il faut bien la soumettre aux opérations de la dérivation, selon l'équation de la chaleur. En fait, la théorie des distributions tempérées qui généralise la notion de fonction s'avère bien adaptée. Plus généralement, en Analyse de Fourier on a remplacé l'arbitraire injustifiable de Fourier par la généralité de la fonction dans des espaces fonctionnels déterminés. Dans la mesure où on ne travaille qu'avec des intégrales, et que suffit la notion de solution faible. Voir plus loin la IV^{e} partie.

[26] Justement la forme, amortie en x : $e^{-(2n+1)x} \cos (2n+1)y$.

$$Y = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + etc. \qquad (5)$$

Les fonctions d'ondulation convenablement additionnées devraient représenter une constante ! Fourier souligne le fait qu'il est le premier à résoudre ce qui paraît être un paradoxe. Le calcul que Fourier tente paraît désespéré, même s'il suit les automatismes sur une équation comme l'équation (5). On remarque en tout cas que la valeur de la somme de droite en $y = \pm\frac{\pi}{2}$ sera bien nulle. *C*e qui correspond à la définition particulière choisie pour fonction *Y*. Puisque cette égalité est vraie pour tout *y* dans l'intervalle dit, on aura le même résultat en dérivant autant de fois que nécessaire en *y*. Devant la forme des dérivées d'ordre pair, on se contente de faire *y= 0* dans toutes les équations : c'est aussi cela le caractère expérimental d'un calcul. Même si le nombre des équations est infini, comme le fait remarquer Fourier, le problème paraît être algébrique et se réduire à une élimination. Les calculs n'en paraissent pas moins particulièrement lourds. Fourier procède habilement en tronquant, et ci-dessous il traite le cas *n= 3*, donc s'arrête d'abord dans (5) à l'entier 7 (soit 2.3+1). Je ne vais pas le suivre et montre seulement des extraits des nombreuses pages écrites par Fourier à ce propos, pour bien faire saisir le courage de l'auteur, et en plus sa ténacité à les reproduire, alors même qu'il va trouver un autre moyen, bien plus court. C'est qu'il considère que le calcul préalable, l'expérimentation ainsi faite, contribue à la compréhension du phénomène étudié.

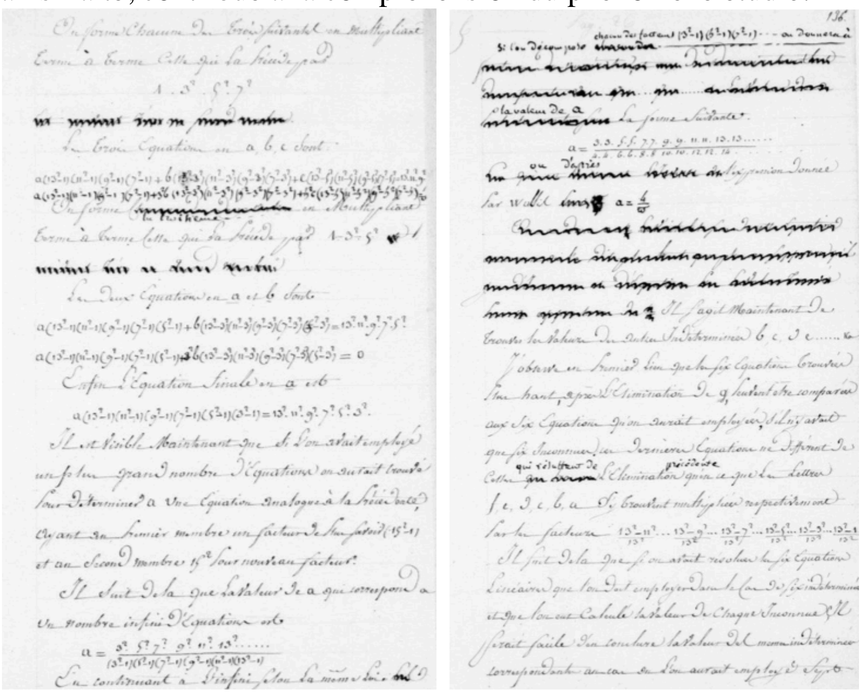
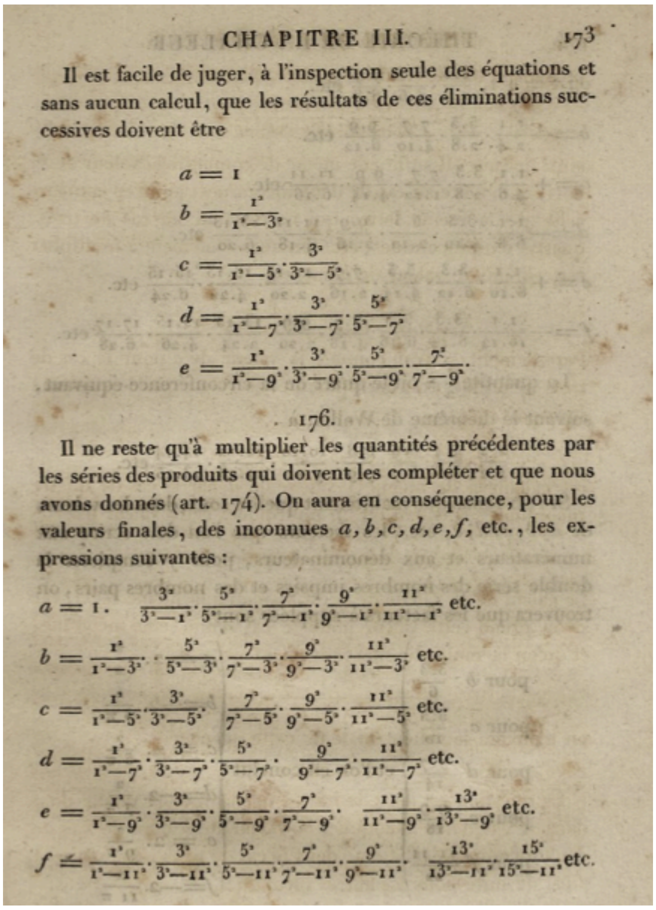


Figure 10. Deux pages successives de brouillons, que je donne notamment pour visualiser les ratures nombreuses de Fourier, en vue de sa *Théorie analytique de la chaleur* (BNF, Ms 22 525, feuilles correspondant à la numérotation 136. Ces pages concernent le calcul des coefficients pour la fonction constante *1*, en fait la fonction *Y*, égale à 1 sauf aux bords de la lame où elle est nulle. L'écriture de base de ce manuscrit n'est pas celle de Fourier, mais il utilise son valet à la préfecture de l'Isère à Grenoble pour mettre au propre. Il ajoute ensuite des corrections dans une autre encre, barre certaines choses...



CHAPITRE III. 173

Il est facile de juger, à l'inspection seule des équations et sans aucun calcul, que les résultats de ces éliminations successives doivent être

$$a = 1$$
$$b = \frac{1^2}{1^2-3^2}$$
$$c = \frac{1^2}{1^2-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}$$
$$d = \frac{1^2}{1^2-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}$$
$$e = \frac{1^2}{1^2-9^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-9^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-9^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-9^2}.$$

176.

Il ne reste qu'à multiplier les quantités précédentes par les séries des produits qui doivent les compléter et que nous avons donnés (art. 174). On aura en conséquence, pour les valeurs finales, des inconnues a, b, c, d, e, f, etc., les expressions suivantes :

$$a = 1.\ \frac{3^2}{3^2-1^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-1^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-1^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-1^2}\ \text{etc.}$$
$$b = \frac{1^2}{1^2-3^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-3^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-3^2}\ \text{etc.}$$
$$c = \frac{1^2}{1^2-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-5^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-5^2}\ \text{etc.}$$
$$d = \frac{1^2}{1^2-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-7^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-7^2}\ \text{etc.}$$
$$e = \frac{1^2}{1^2-9^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-9^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-9^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-9^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-9^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-9^2}\ \text{etc.}$$
$$f = \frac{1^2}{1^2-11^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-11^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-11^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-11^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-11^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-11^2}\cdot\frac{15^2}{15^2-11^2}\ \text{etc.}$$

Figure 11. Une autre page parmi les nombreuses relatives au calcul par approximations successives des coefficients de la fonction *Y*, cette fois dans l'édition originale en 1822 de la *Théorie analytique de la chaleur* (p. 173).

Le plus intéressant, et en fait le vrai résultat de l'analyse, est qu'au terme de ces longues pages, Fourier parvienne à un résultat pour les coefficients qui s'exprime simplement et dès lors s'en étonne :

$$a = \frac{4}{\pi}, b = -\frac{1}{3}\frac{4}{\pi}, c = \frac{1}{5}\frac{4}{\pi}, d = -\frac{1}{7}\frac{4}{\pi}, \ldots$$

Bien sûr Fourier donne la forme que nous reconnaissons comme un succès pour la représentation d'une constante dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$. Et paraît dédaigner la question de la convergence. Je le cite, tant il est explicite, et on voit le passage de 1 à la constante du quart de la circonférence de rayon 1.

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations et à déterminer les coëfficients a, b, c, d, etc., de l'équation

$$1 = a\cos.x + b\cos.3x + c\cos.5x + d\cos.7x + e\cos.9x, + \text{etc.}$$

La substitution de ces coëfficients, donne l'équation suivante :

$$\frac{\pi}{4} = \cos.y - \frac{1}{3}\cos.3y + \frac{1}{5}\cos.5y - \frac{1}{7}\cos.7y + \frac{1}{9}\cos.9y - \frac{1}{11}\cos.11y + \text{etc.}$$

Le second membre est une fonction de y, qui ne change point de valeur quand on donne à la variable y une valeur comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente, c'est-à-dire que, en mettant au lieu de y un nombre quelconque, et en poursuivant le calcul des coëfficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe, en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés, devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration, que le lecteur peut suppléer, nous ferons remarquer que la valeur fixe, dont on approche continuellement, est $\frac{1}{4}\pi$, si la valeur attribuée à y est comprise entre o et $\frac{1}{2}\pi$, mais qu'elle est $-\frac{1}{4}\pi$, si y est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$; car, dans ce second intervalle, chaque terme de la série change de signe. En général la limite de la série est alternativement positive et négative; au reste, la convergence n'est point assez rapide pour procurer une approximation facile, mais elle suffit pour la vérité de l'équation.

Figure 12.

Fourier adopte le style que nous avons lu bien plus tôt sous la plume de Mersenne expliquant la fonction sinus verse. Si l'équation (1) vaut pour trouver les valeurs des coefficients *a, b, c,* etc., le membre de droite a encore un sens pour toutes les valeurs de *y* au-delà des bornes imposées par la physique de la lame. Compte tenu du cosinus, donc des ondes, la fonction donnée par la série de droite est définie pour toute valeur réelle de *y*, est paire par choix délibéré de simplification et périodique de période 2π. Fourier prend le soin de la décrire en des termes jusqu'ici inconnus en mathématiques : « des droites séparées dont chacune est parallèle à l'axe et égale à la demi circonférence » (ce qui lui évite d'écrire la lettre grecque). Les modes propres ont donc fait éclater la restriction qui paraissant aller de soi d'une fonction *Y* qui serait définie seulement sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$. La notion de fonction périodique s'est donc imposée. C'est une grande découverte de Fourier ; cette extension est le fruit d'un calcul. Il donne des exemples graphiques, dont le premier (figure 13) est celui ici discuté de la fonction *Y*, prenant des valeurs négatives sur $]\frac{\pi}{2},+3\frac{\pi}{2}[$, et de période 2π. C'est encore une première dans la représentation graphique.

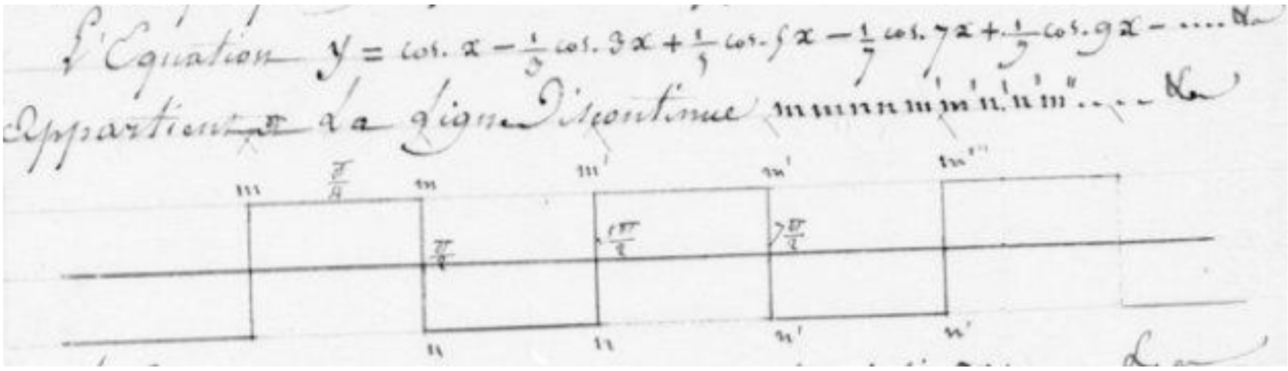
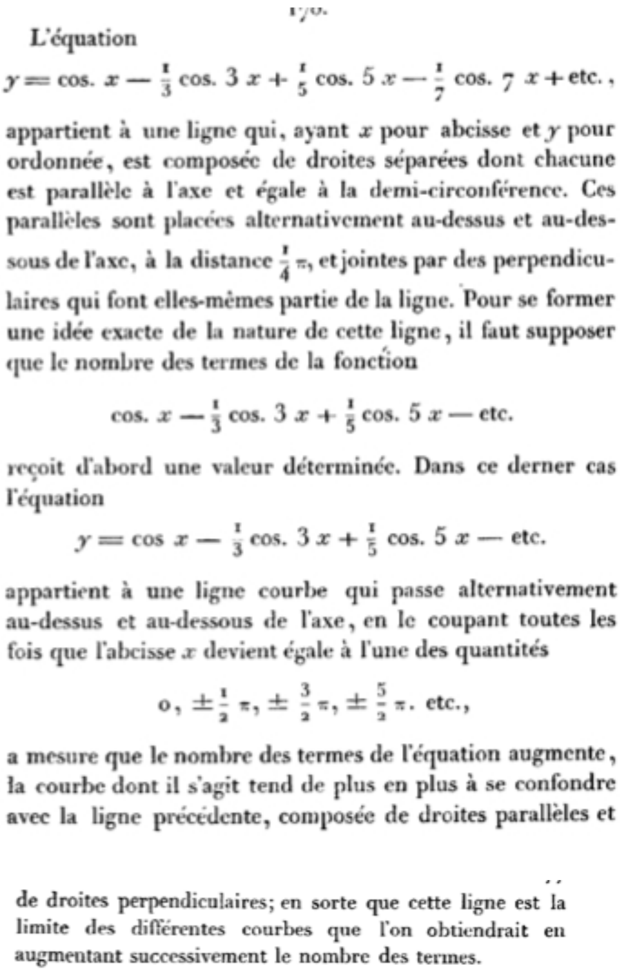


Figure 13. La représentation de la fonction *Y* périodique dans un manuscrit de Fourier (BNF, Ms 22 525, feuille avant celle notée 108°.



170.

L'équation

$$y = \cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \frac{1}{7}\cos. 7x + \text{etc.},$$

appartient à une ligne qui, ayant x pour abcisse et y pour ordonnée, est composée de droites séparées dont chacune est parallèle à l'axe et égale à la demi-circonférence. Ces parallèles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, à la distance $\frac{1}{4}\pi$, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne. Pour se former une idée exacte de la nature de cette ligne, il faut supposer que le nombre des termes de la fonction

$$\cos. x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \text{etc.}$$

reçoit d'abord une valeur déterminée. Dans ce derner cas l'équation

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos. 3x + \frac{1}{5}\cos. 5x - \text{etc.}$$

appartient à une ligne courbe qui passe alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, en le coupant toutes les fois que l'abcisse x devient égale à l'une des quantités

$$0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi. \text{ etc.},$$

a mesure que le nombre des termes de l'équation augmente, la courbe dont il s'agit tend de plus en plus à se confondre avec la ligne précédente, composée de droites parallèles et de droites perpendiculaires; en sorte que cette ligne est la limite des différentes courbes que l'on obtiendrait en augmentant successivement le nombre des termes.

Figure 14.

Grâce aux machines, nous pouvons aujourd'hui « voir » ce que Fourier ne peut que décrire au moyen de courbes successives selon que l'on s'arrête à l'entier 3, 5, 7, etc. La figure ci-jointe modifie un peu les axes pour plus de lisibilité, et fait voir un phénomène de pointes au-dessus, ou au-dessous des parties verticales : c'est le phénomène dit de Gibbs qui tient à la discontinuité de la fonction aux points concernés.

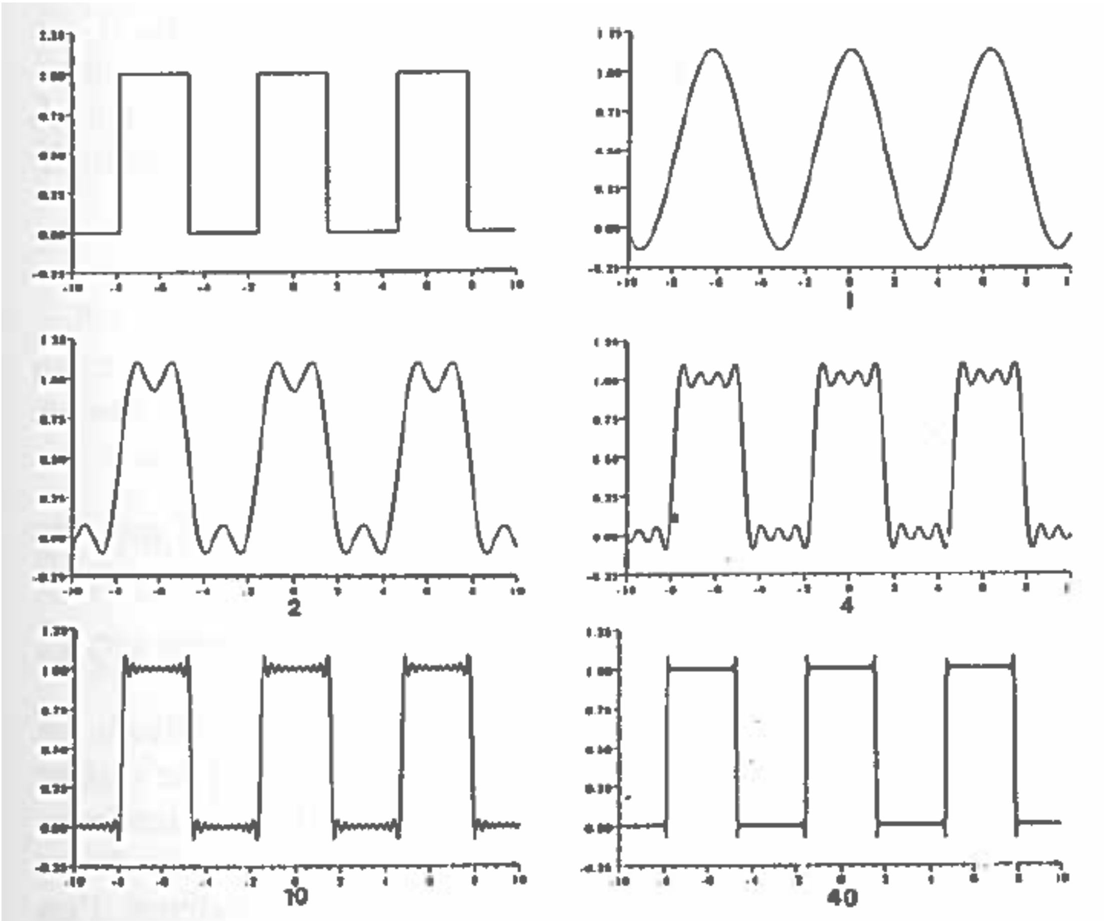


Figure 15. Représentation graphique des approximations successives par des ondulations de la fonction créneau placée en premier à gauche (tiré du livre J. Dhombres, et J.B. Robert)

Quelque chose de tout nouveau quant au calcul qui a permis ces graphiques se passe maintenant. Fourier veut comprendre pourquoi un calcul si long a pu aboutir à un résultat si simple pour les valeurs des coefficients, à savoir les expressions $(-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$. Ce sont celles que l'on voit dans l'extrait suivant du manuscrit de Fourier. Et vient la compréhension des relations d'orthogonalité – un vocabulaire ultérieur qui tient à une géométrisation de l'idée de Fourier - qui portent sur les modes propres. Si l'on calcule l'intégrale du produit de deux modes propres, avec *2n+1* et *2m+1,* sur $-\pi \le y \le \pi$, c'est-à-dire sur une période de Y on obtient 0 pour *n* différent de *m*. Soit :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2n+1)x.\cos(2p+1)x.dx = 0 \tag{6}$$

Le calcul est quasiment évident par linéarisation du produit des cosinus. A partir de cela on voit comment calculer les coefficients pour une fonction paire quelconque *Y* périodique et de période 2π.

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n+1)y \tag{7}$$

Puisqu'il suffit de remarquer que le coefficient a_n se déduit très aisément du calcul de l'intégrale du produit de *Y* par *cos(2n+1)x*, en effectuant le calcul de l'intégrale sur la période du carré de ce cosinus

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(y)\cos(2n+1)y dy \tag{8}$$

La relation (8) est dite relation d'orthogonalité, et on verra la raison générale de cette appellation en IIIe partie. La relation (3) est une synthèse, celle donnant Y, et la relation (4) une analyse donnant la valeur du coefficient dit de Fourier. Si je n'ai pas explicité tous les calculs, mais j'ai signalé la question essentielle de la périodicité. Au moins chacun peut vérifier qu'une théorie mathématique est née. Par ce que l'on peut appeler la pratique mathématique d'une relation intégrale, ne croyons pourtant pas disposer ainsi de l'explication claire et distincte de la découverte ! Ne tient en effet pas longtemps la splendide distinction condillacienne, celle qui place en les associant un avant et un après pour les deux opérations de décomposition et de recomposition[27]. Puisque le calcul des coefficients, d'abord fruit d'une laborieuse technique algébrique d'élimination, n'est de fait accessible à la raison explicative que par l'intervention des relations (6) d'orthogonalité[28]. C'est-à-dire par la prise en compte de propriétés des modes propres qui leur permettent à chacun d'exister indépendamment[29] des autres comme autant de dimensions distinctes d'une géométrie. Ce sont ces relations qui posent l'analyse comme un moment indépendant du raisonnement. Elles n'en sont pas le fruit naturel et d'ailleurs elles n'opèrent validement qu'à l'occasion de la synthèse de la fonction[30]; elles pourraient logiquement être omises de l'analyse proprement dite. En d'autres termes, les relations d'orthogonalité ne constituent pas la charnière qui ferait passer de l'analyse à la synthèse, chacune bien individualisée comme autant de moments distincts du raisonnement et de la preuve. Il nous faut

---

27 Dont J. Derrida dans *l'Archéologie du frivole* a fait la destructuration (Paris, Galilée, 1973, en introduction à la réédition de l'*Essai sur l'origine des connaissances humaines* ; il existe une édition séparée, Paris, Galilée, 1990).

28 Une excellente présentation historique et épistémologique de ces relations sur deux siècles est fournie par J.B. Pécot, *Histoire des relations d'orthogonalité*, thèse, Université de Nantes, 1992.

29 Portée par les relations d'orthogonalité, l'indépendance des modes propres est le concept majeur, celui qui permet d'effacer l'opposition entre analyse et synthèse.

30 Je ne prétends surtout pas, en quelques lignes, reconstituer la genèse historique de la découverte chez Fourier, et surtout confirmer ou infirmer ce qu'il en dit lui-même et que j'ai déjà présenté comme tout à la fois récit et réalité : l'ordre des idées est ce que je retiens. En l'occurrence, quoi qu'il en soit de l'origine du calcul des coefficients de Fourier, et éventuellement du copiage chez un autre auteur comme Euler, l'obtention par orthogonalité est toujours seconde, après un calcul algébrique dont Fourier n'effacera jamais la trace. Alors même qu'il aura occasion de donner à sa théorie tout le poli de la synthèse. La *Théorie analytique* de 1822 n'est en effet que le dernier d'une série de manuscrits, dont le premier est terminé en 1805, le deuxième en 1807, le troisième en 1811, une partie de ce dernier étant tardivement imprimée par l'Académie ("Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides", *Mém. Acad. Royale des Sciences*, 4, 1819/20, p. 185-555, parution en 1824), alors même qu'un grand prix a été décerné en janvier 1812.

constater que l'analyse ne s'offre à l'explication qu'une fois dûment effectuée la synthèse. Contrairement à ce que disent les épistémologies classiques des mathématiques qui privilégient le plus souvent à juste titre les routes sans croisement, à la manière par exemple de Léon Brunschvicg[31], la synthèse n'est pas simple justification de l'analyse, ni même mise en forme selon le canon mathématique, et donc simple affaire de mise en rigueur[32]. En effet, expérience cruciale, le calcul donnant les coefficients de Fourier fonctionne exactement quand bien même la synthèse "oublierait" certains modes simples. Avant donc la preuve, nous tirons une conséquence. L'analyse a son indépendance ; seule elle n'est pas propice à la vérité. La synthèse n'est pas conclusion ; elle réinterprète l'analyse qui derechef prend un nouveau sens : un cycle commence.

N'est pas sous-estimée par Fourier l'aporie qui rend apparemment confus l'ordre des opérations intellectuelles, analyse/synthèse, et aussi bien en droit qu'en fait le cycle annule leur opposition. Mais une aporie, étymologiquement c'est ce qui est sans chemin, alors que chez cet auteur l'annulation est une voie ; il invente le croisement qui donne le cycle. C'est ce qui lui permet de créer la théorie : c'est en effaçant l'opposition, c'est-à-dire le parallélisme ou l'absence de rencontre, qu'il peut penser et parvient à fonder les modes qui pourraient être dits "simples" parce que faciles à calculer, en modes "propres", car en un sens métaphorique, ils déterminent une géométrie. C'est-à-dire un champ de propriétés qui s'enchaînent dans un ordre qui est en relation avec les objets en cause et des relations d'invariance les concernant. Le cheminement du calcul qui les lie n'es plus une énigme, ni une suite d'astuces, mais le déroulement d'une synthèse qui avance en étant assurée d'aller jusqu'au bout. La métaphore de la géométrie n'est pas usurpée compte tenu de l'orthogonalité, qui ne sera pourtant reconnue qu'au XXe siècle.

Ces modes propres, explique Fourier, sont intrinsèquement liés à l'objet "fonction périodique" parce que la nature les construit ainsi : toute l'étude est celle de la propagation de la chaleur dans les solides et les fonctions périodiques y apparaissent inéluctablement. Il y a des "ondes" de chaleur, mélange d'une décroissance exponentielle lorsque l'on s'éloigne de la source de chaleur et d'une oscillation périodique. Il vaut mieux répéter : un calcul a montré la chaleur comme étant de nature ondulatoire ! Donc l'analyse dans son ordre propre révèle du phénoménal. Modes propres, la physique les indique par le biais analytique, et bien au-delà de l'exemple des fonctions périodiques, car ils surgissent sous la plume inventive de Fourier dans d'autres circonstances, avec les fonctions de Bessel pour ne fixer qu'un autre exemple célèbre[33]. Distinguons le fait essentiel qui instaure la généralité : les modes propres sont présents dans tous les phénomènes de propagation de la chaleur, et à ce seul titre leur dénomination serait physiquement justifiée. Mais ils sont aussi bien les harmoniques de la théorie du son, ou de celles des marées. Sans perte de "propreté", l'harmonique devient théorie mathématique parce qu'elle est universelle ; ce n'est pas le jeu mathématique qui lui a conféré cette qualité. Fourier a éliminé tous les intermédiaires entre pensée et monde en croisant analyse et synthèse.

---

[31] Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Félix Alcan, 1912, nouvelle édition avec une préface de J.T. Desanti, Paris, Blanchard, 1972.

[32] Si j'ai volontairement oublié de le dire en préambule en stipulant que l'œuvre de Fourier est de physique, c'est que, dans l'esprit contemporain, cela aurait aussitôt fait jouer l'anachronique opposition mathématiques pures/mathématiques appliquées, et l'on aurait trop vite été prêt à accepter une rigueur médiocre chez un mathématicien travaillant sur le réel, et ainsi d'avance minimisé les difficultés de distinction de l'analyse et de la synthèse (car ces distinctions ne paraissent relever que du pur).

[33] Exemple auquel Fourier lui-même accorde beaucoup parce qu'il universalise sa méthode en la sortant de la catégorie trop restreinte des séries trigonométriques ; issue des fonctions de Bessel, dont les relations d'orthogonalité n'ont rien d'évident, l'orthogonalité devient outil et explication. Elles permettent de fournir ue connotation géométrique aux calculs entrepris.

La nature de ces modes n'en fait pas moins l'objet d'une "démonstration" spécifiquement mathématique : nous sommes parvenus au croisement actif de la synthèse et de l'analyse. Comment peut-on, en effet, démontrer le caractère propre d'un objet que l'analyse a fourni ? Parce qu'elle en a établi la forme, il n'y a aucun doute sur l'existence même des modes propres et la synthèse n'est pas seulement présente pour faire exister ; ces modes peuvent d'ailleurs se réduire à de braves fonctions sinus et cosinus des multiples entiers de la variable[34]. Certes, en permettant de reconstituer la fonction à partir d'eux, la synthèse accrédite les modes dans leur statut propre. Mais c'est loin d'être suffisant, dans la mesure où cette démonstration de synthèse partage un défaut avec celle de l'analyse ; elle fonctionne, mais ne fait pas comprendre[35]. Ce qui ne peut qu'apparaître scandaleux dans l'optique d'une démonstration d'un caractère "propre".

En revanche, le caractère simple de ce qui doit être prouvé "propre" est indéniable : dans l'équation aux dérivées partielles qui gère la propagation de la chaleur, un mode est une solution dont les variables sont séparées ; on dispose du produit d'une fonction de l'une des variables par une autre fonction d'une autre. Telle en est d'ailleurs la caractérisation pour les besoins du calcul[36]. Pour le moins, la caractérisation est dans l'ordre analytique. Cette méthode de séparation des variables pour avoir une solution particulière était connue bien avant Fourier : on aurait tort de penser qu'il n'a fait que l'appliquer. Les modes propres ont chez lui un caractère naturel, et non celui d'un artéfact ou d'une astuce. Mais aussi bien, car elle est de forme, une astuce ne saurait "démontrer" le caractère propre ; c'est une ruse pour l'atteindre, non pour le prouver.

Au total, nous voyons par exemple avec la formule (8), que le calcul des coefficients de Fourier, l'analyse donc, est un résultat de cette opération qu'est l'intégration. Il est alors intéressant de revenir sur cette opération chez Roberval, cet auteur lu en premier, et tester la généralité qu'il y mettait, bien différente de celle apparue avec Leibniz et Newton.

II.3 "Tous les sinus ensemble", ou le jeu analytique sur les sommes de Roberval

Puisque nous venons de voir l'importance de l'intégrale pour la théorie de Fourier, et pour comprendre la façon de traiter l'intégrale d'une fonction numérique, je reviens sur une des premières propositions de Roberval dans son *Traité des indivisibles* dont nous avons une version publiée dix huit ans après sa mort. Car y est donnée sans trop d'éclat une proposition (la quatrième dans le *Traité* de Roberval) qui est, véritablement, une nouveauté de l'intégrale avec l'aire d'un arc quelconque d'une courbe particulière, en fait un arc de cercle repéré en axes orthogonaux. Un célèbre cas ancien de référence est le traitement d'un arc quelconque de parabole par Archimède, que l'on dit être une quadrature dans la mesure où il y a équivalence avec l'aire d'une figure rectiligne. Ce travail chez Roberval vient juste après le calcul de l'aire de l'arche d'une cycloïde, qui est un arc particulier de cette courbe et non l'arc général. On ne devrait donc pas parler de quadrature cette fois, au sens où la

34 Mais ils peuvent être autrement compliqués, et l'exemple des fonctions de Bessel est là pour le prouver.

35 Ici la synthèse est ce qu'elle est étymologiquement : une addition. Les cosinus seulement dans le cas de la lame tient au choix fait pour simplifier ici d'une fonction paire.

36 C'est par cette séparation qu'aujourd'hui, à partir de l'équation de la chaleur, l'étudiant est d'abord confronté aux séries de Fourier. Parce que la théorie de Fourier est littéralement restée inchangée en physique aussi bien qu'en mathématiques, donc a été l'objet de formalisations didactiques tout à fait remarquables, l'objectif de la démonstration d'un caractère propre n'apparaît plus comme essentiel : il est d'avance acquis si l'on peut dire. Tel est souvent le résultat du poids conjugué de l'histoire et de l'objectivité ; telle est aussi bien la difficulté de principe d'une histoire de l'objectivité. La remarque peut donner à réfléchir sur ce que peut apporter l'histoire à la compréhension d'un calcul.

question n'est plus de donner un équivalent figuré rectiligne, comme un carré. Le même passage révolutionnaire de la quadrature à l'intégrale vaut pour le résultat sous l'hyperbole de Grégoire de Saint-Vincent[37], mais il faut bien sûr ne pas donner au mot intégrale la valeur d'antidérivation qu'à la fois Newton et Leibniz allaient lui procurer de façon magistrale.

L'intégrale en question avec Roberval correspond à un calcul selon ce que nous appelons aujourd'hui des sommes de Riemann à pas constants. Mais elles sont traitées comme des moyens de calcul par un jeu de passage à l'infini qui néglige d'une façon non quantifiée des sommes de quantités considérées comme trop petites pour compter. Donc je n'emploie pas cette terminologie. Il ne serait pas plus de bonne description de parler de façon passéiste du jeu de figures inscrites et circonscrites à la manière des Anciens, celle que précisément reprenait avec talent Grégoire de Saint-Vincent dans son livre de 1647. Mais comme chez Grégoire de Saint-Vincent, c'est un calcul qui chez Roberval prend la part essentielle, et si le support est une figuration géométrique, les manières de ce calcul sont celles des proportions, quoique sans aucune aide algébrique. D'ailleurs le titre donné à ce travail particulier de Roberval est explicite : “Proportion de la circonférence du cercle à son diamètre”[38].

Evelyn Walker en 1932 dans un travail systématique de traduction et d'interprétation moderne en anglais du *Traité des indivisibles* a fondamentalement raison d'exprimer que le résultat de la proposition 4 est [39]:

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta = \cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1$$

Donc il inscrit le résultat comme connaissance de la primitive de la fonction sinus. C'est trop vite dit. Car le lien entre le sinus le cosinus n'intervient pas chez Roberval, pas plus que la notation intégrale dont on sait qu'elle est due à Leibniz utilisant en plus la notation *d* qui n'est certainement pas disponible chez Roberval. Cet auteur donne une expression dans laquelle joue la notion de “tous les sinus ensemble”, et ne donne pas explicitement une proposition, mais un énoncé avec repérage sur la figure, donc saute l'énonciation qui est propre aux manières d'Euclide et qui faisait la règle encore au milieu du XVII^e^ siècle. Il passe directement au résultat (fig. 15 pour les notations):

> Soit le cercle *AIBQ*, son diamètre *AB*, et soient tirés les sinus *CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF*. Que les arcs *CG, GH, HI, IL, LM, MD* soient égaux ; je dis que la ligne *EF* est à la circonférence *CD*, comme tous les sinus ensemble, savoir *CE, GV* et tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demi-diamètres.[40]

“Je le montre ainsi” écrit aussitôt Roberval, et c'est bien sûr cette preuve qui fait comprendre ce dont il est vraiment question dans cet énoncé que Walker juge emberlificoté (“*very cumbersome*”). Il me semble que l'on peut convenir d'une notation préalable, non pour “tous les sinus ensemble”, mais pour une somme finie, où le nombre d'éléments sommés est indiqué par *n*. Roberval parle indirecement de cet *n*, en utilisant l'expression “autant”. Bref on peut convenir d'écrire pour signifier

---

[37] En fait, Grégoire de Saint-Vincent, dans son *Opus geometricum* de 1647, établit pour *x* supérieur ou égal à 1, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$. Ainsi le logarithme cesse d'être un objet donné par des tables approximatives, aussi précises soient-elles, pour devenir un objet déduit de la géométrie, comme aire sous la courbe hyperbole. De la même façon, Roberval et Wallis ont fait entrer la fonction sinus en mathématiques en la dotant d'un graphe précis de fonction périodique simple, et donnant ainsi à voir une onde.

[38] Roberval, *Traité des indivisibles*, in *Divers ouvrages de M. de Roberval*, 1693, p 193.

[39] Evelyn Walker, *A Study of the Traité des indivisibles de Gilles Personne de Roberval*, Teachers College, Columbia University, New York City, 1932.

[40] *Idem* (orthographe modernisée)

une somme (finie) de sinus, ou “somme partielle de Roberval” (abréviation SR), et un ensemble de sinus :

$$SR_n(\vartheta_1,\vartheta_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin_R\vartheta_k$$

en appelant le sinus tel qu’entendu à l’époque, soit $\sin_R\vartheta=R\sin\vartheta$, et numérotant par indexation les angles ϑ depuis 1 à n, angles repérant à partir du centre du cercle et de l’horizontale *AB* sur la figure de Roberval ci-dessous les points notés *C, G, H , I*, jusqu’au dernier *D*. Peu importe que l’on prenne un angle ou son supplément, mais bien sûr les points *E* et *F* seront repérés convenablement par les valeurs des cosinus du premier et du dernier angle, tous situés au-dessus de l’axe orienté *AB* (angles non tracés sur la figure). On peut convenir que pour tout n, on prendra $\theta=\vartheta_1;\theta'=\vartheta_n$. Roberval explicite que les angles sont tels que les arcs circulaires *CG, GH, HI, ...MD* sont égaux, et de fait égaux à l’arc de référence *A8*, sachant donc que le n que nous employons est symboliquement égal à 7 chez Roberval.

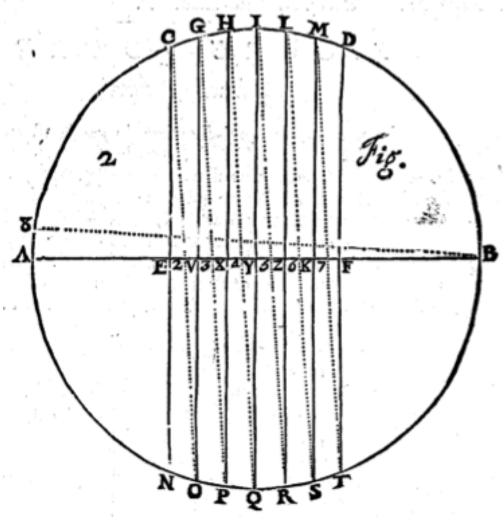


Figure 16. Publiée en 1693 dans un Recueil académique, cette figure de Roberval justifie son estimation de “sommes de sinus”.

Faire apparaître une telle “somme partielle de Roberval” est chose aisée dans cette géométrie des proportions : il suffit en effet d’utiliser les triangles rectangles semblables successifs *EC2*, *2OV, VG3*, etc. On donne le nom de 2, 3, etc. jusqu’à 7 aux intersections avec *AB* des lignes dites diagonales par Roberval *CO, OG*, etc. Sur cette figure il manque un point pourtant référent, puisqu’il s’agit de la projection de *3* sur *AB*, que j’appelle *0*, et qui nous procure le triangle rectangle de base *E0B*, semblable à tous les autres déjà nommés. Par propriété de la cotangente du même angle, on a évidemment l’égalité du même rapport, ou analogie :

$$\frac{OB}{03}=\frac{EC}{E2}=\frac{OV}{2V}=\frac{VG}{V3}...=\frac{7F}{TF}$$

Et on applique la loi que je qualifie d’addition proportionnelle, qui consiste à ajouter les numérateurs et les dénominateurs sans changer le rapport, donc à avoir

$$\frac{OB}{03}=\frac{EC+OV+VG+...+TF}{E2+2V+V3+...7F}$$

Une simplification évidente se voit au dénominateur dès la somme *E2* et *2V* qui donne *EV*, etc., et au numérateur aussi bien donnant les longueurs *CN*, *OG*, etc. Donc

$$\frac{OB}{03}=\frac{EC+OG+PH+...+TF}{EF}$$

Si on revient au cas générique avec *n* et aux “sommes de Roberval”, on a effectivement

$$\frac{OB}{03}=\frac{EC+2\sum_{k=2}^{n-1}\sin_R\vartheta_k+TF}{EF}=\frac{2nSR_n(\vartheta_1,\vartheta_n)-EC-TF}{EF}$$

C’est maintenant que surviennent des passages à la limite, En faisant d’abord passer *n* dans l’autre rapport, pour que avoir *n03*, puis en faisant n infini, *0B* devenant *AB*, et *n03* devenant la longueur de l’arc circulaire allant de *C* à *D*, mais négligeant les deux longueurs *EC* et *TF* puisqu’elle se trouvent divisées par *n* : “cela n’importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice”. Et bien sûr convenant d’appeler “ensemble de tous les sinus” la limite de $SR_n(\vartheta_1,\vartheta_n)$, que l’on peut noter alors $SR(\theta,\theta')$ et dire comme “somme de Roberval”:

$$\frac{AB}{\widehat{C}\widehat{D}}=\frac{2SR(\theta,\theta')}{EF}$$

Et en divisant par 2 les numérateurs, on a effectivement :

$$\frac{R}{\widehat{C}\widehat{D}}=\frac{SR(\theta,\theta')}{EF}$$

Comme énoncé par Roberval, *EF* est à la longueur de l’arc circulaire comme la “somme de Roberval” est au rayon ou demi diamètre. Et Roberval peut en déduire un cas particulier, celui où *E* est en *A* et *F* au centre du cercle. De sorte qu’il peut énoncer pour le quart de la circonférence, introduisant une nouvelle terminologie, celle de “tous les sinus divisant la circonférence”, qui ne correspond pas à ce que nous avons pris comme “somme de Roberval” . Car ici il faut étrangement faire intervenir le nombre *n* de la division, ce qu’on lit par le “autant”, et l’expression “tous les sinus” ne pouvant valoir que pour la somme partielle de Roberval, multipliée par le nombre de la division.

> Le demi diamètre est au quart de la circonférence comme tous les sinus divisant la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi diamètres.[41]

C’est utile pour ce qu’il veut faire à la propositon suivante, numérotée 5, mais il est bien dommage qu’il ne commente pas son résultat sur un arc quelconque de cercle, montrant le jeu d’échange de sinus et de cosinus par intégration.

La proposition suivante est explicitement présentée comme une quadrature, “figure courbe égale à un carré”, et pour nous elle ne peut que valoir pour l’intégrale d’une demie sinusoïde sur la moitié de sa période. La figure est très simple, sans cercle représenté, et *AB* vaut le rayon et *BC* le quart de la circonférence, tandis que les divisions *BG, GI, IM, MP* et *PC* sont égales, correspondant

[41] Roberval, *Traité des indivisibles*, in *Divers ouvrages de M. de Roberval*, 1693, p 193.

à des divisions égales pour les arcs sur le cercle non représenté. Roberval énonce : le carré de *AB* qui est *ABFR* et égal à la figure *ABC*.

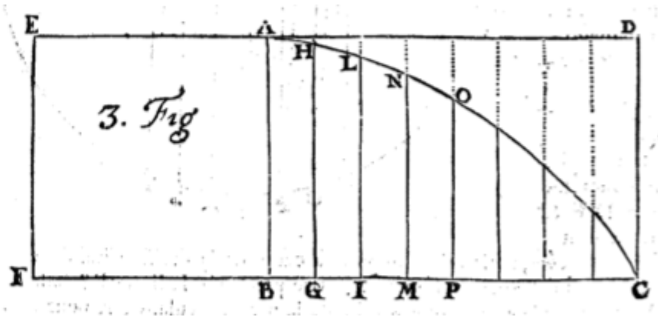


Figure 17. Figure également publiée en 1693 par laquelle Roberval explique le calcul d'une aire sous la fonction sinus.

Cette fois, Roberval introduit une autre terminologie encore, celle des "petits sinus infinis" pour désigner ce que nous avons appelé une "somme de Roberval". Evidemment l'adjectif "petit" est justifié par le coefficient en *1/n* devant le sinus lui-même, mais nous avons lu comme crollaire énoncé de la proposition 4 qu'il le faisait passer en multiple du rayon. La différence essentielle avec la figure précédente du cercle est, si l'on peut dire, que le cercle justement a été appliqué sur la droite, comme inspiré par le roulement de la cycloïde, et que la variable si l'on peut dire de façon anachronique, est cette fois la valeur de l'arc circulaire disposé suivant *BC*. La démonstration est plutôt laconique. Roberval applique le résultat précédent mais pour un nombre fini de divisions de la longueur du quart de la circonférence BC (5 selon sa figure). On lit d'abord une approximation

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB + BH + LI + MN + PO}{nAB},$$

qui est brutalement transformée en une autre d'où *n* a disparu, à savoir $\frac{AB}{BC} = \frac{aireABC}{aireABCD}$, que l'on peut comprendre comme un quotient de deux sommes de Roberval, que j'écris d'abord en faisant voir *n*, puis en donnant une notation pour les sommes de Roberval sous deux "courbes" différentes, *SR(ABC*), ou *SR(AD)*, cette dernière étant la "courbe" horizontale *AD*.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB(\frac{BC}{n}) + GH(\frac{BC}{n}) + IL(\frac{BC}{n}) + \ldots}{AB(\frac{BC}{n}) + AB(\frac{BC}{n}) + \ldots} = \frac{SR(ABC)}{SR(AD)}$$

L'interprétation de ces sommes de Roberval pour les aires sous les courbes donne d'un côté le rapport des deux aires, et donc *SW(AD)= AB.BC*. Tandis que le premier rapport quand on le multiplie haut et bas par AB, fournit évidemment par comparaison au même produit *AB.BC*, la valeur explicite:

$$Aire\ (ABC) = AB^2$$

Que l'on peut interpréter, depuis Leibniz, comme donnant la valeur de l'intégrale de la fonction sinus :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta . Rd\theta = R^2[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

Mais il est impossible de dire comme l'assène Walker que c'est ce qu'a établi Roberval. Il a certes carré la fonction *Rsinus* sur sa demie période en calculant explicitement par des sommes de Roberval; qui sont à pas constants. Je traduit cette fois le long titre complet du livre de Walker pour que l'on puisse juger de ses motivations à écrire : *Une étude du Traité des indivisibles de Gilles Personne de Roberval, dans l'objectif de répondre, dans la mesure du possible, à deux questions. Quelles propositions de cet ouvrage sont les siennes propres et celles qui sont dues à ses prédecesseurs ou contemporains ? Et quel effet, s'il y en eut, sur le travail de ses successeurs ?*

L'effet est indéniable. Puisque le calcul de Roberval réussit, mais il ne réussirait pas toujours avec d'autres fonction. Est-ce bien, comme dans le cas de calcul des coefficients *a, b, c*, etc., qu'il existe une structure sous-jacente ? Mais alors que Fourier découvre cette structure grâce aux relations d'orthogonalité, Roberval n'a pas eu la force de voir que le calcul intégral avait partie liée avec un calcul sur les infiniment petits (que je n'ai pas décrit ici). Son calcul donne un résultat, mais il n'est pas interprétable.

IIIème Partie. La part de calcul d'une théorie avec les relations de Heisenberg comme nécessaire contrainte

Mon dernier propos sur l'intégrale n'est évidemment pas de reprendre un récit épistémologique et historique[42] des relations d'incertitude, dont le premier exposé physique fut fourni[43] par Werner Heisenberg en 1927, et déjà avec une interprétation probabiliste de Wolfgang Pauli, quoique sans le formalisme des espaces de Hilbert qui ne vint qu'avec John von Neuman en 1929. Il n'est pas non plus de discourir sur les diverses interprétations de l'incertitude en jeu, et jusqu'à la remise en cause de l'épistémologie de la causalité qui a donné lieu à tant de discussions. Je veux seulement montrer comment la confrontation d'un assez grand nombre de calculs se révéla épistémologiquement favorable, non seulement pour comprendre ces relations, mais aussi pour les manipuler de façon rigoureuse d'un point de vue mathématique. Car c'est un des aspects essentiels de la mécanique quantique que d'avoir cherché une présentation offrant la plus grande garantie mathématique, et ce par le biais de l'axiomatique, et certainement il faut y voir l'influence directe de Hilbert[44], largement exécutée par John von Neumann dans son ouvrage de 1932. Avec Hilbert, l'axiomatique devenait une méthode de découverte, et c'est par la pratique de l'axiomatique que John von Neumann inventa les espaces de Hilbert en tant que substrat de la mécanique quantique, c'est-à-dire comme référent. La différence est nette avec l'invention du calcul intégral. Non qu'il n'y avait pas de difficultés de mise en rigueur de ce calcul, mais au XVII^{e} comme au XVIII^{e} siècle, l'on ne cherchait pas à le présenter sous une forme axiomatique. En mécanique quantique, ce fut une structure *ad hoc* qu'il fallut inventer.

Je voudrais envisager le plus simplement possible les ingrédients mathématiques qui auraient été utiles à la formalisation purement mathématique des relations dites d'incertitude de Werner Heisenberg pour la mécanique quantique, en débordant à peine ce qui serait strictement nécessaire pour un seul exposé logique. J'ai besoin des quelques éléments suivants pour faire saisir quelles relations d'Heisenberg tiennent seulement à l'existence d'un angle dans le nouveau domaine où jouent les fonctions d'ondes.

III.1 Les espaces hermitiens.

En géométrie euclidienne à trois dimensions, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel R^3, le produit scalaire se définit intrinsèquement à partir de la notion d'angle, à savoir pour deux vecteurs x et y, le nombre réel $\langle x|y\rangle$ exprime ce produit scalaire comme produit des deux longueurs de x et de y et du cosinus de l'angle que forment les deux vecteurs. Mais considérée comme une forme dans les variables x et y, le produit scalaire noté $\langle x|y\rangle$, possède les propriétés suivantes :

---

[42] Voir par exemple pour de telles informations, le texte de M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1966, ou de J. Cushing, *Quantum Mechanics : Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony,* The University of Chicago Press, 1994.

[43] Werner Heisenberg, Ueber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeit. Phys*., vol. 43, 1927, pp. 172-198.

[44] On retrouve aujourd'hui le détail historique précis du programme de David Hilbert grâce à la publication remarquable du contenu de ses cours à Göttingen, semestre après semestre, qui est une des plus belles réussites de l'érudition des dernières années. Voir la série en cours de publication de David Hilbert's on the Foundations of *mathematics and Physics*, 1892-1932, et en particulier Michael Hallett, Ulrich Mayer, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry,* 1891-1902, Springer Verlag, 2004.

- Pour tout *y*, l'application de R^3 dans *R* définie par $x \to \langle x|y\rangle$ est linéaire.
- Pour tous *x* et *y* de R³, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- $\langle x|x\rangle > 0$ si (et seulement si) $x \neq 0$.

La notation précise du produit scalaire, une notion développée plus tôt dans le cadre de la mécanique pour désigner le travail d'une force, a été adoptée après quelques hésitations par Herman Grassmann en 1862 sous le nom de produit interne, contre d'autres propositions, aussi bien $x \times y$ que *xy*. C'est Paul Dirac qui l'adopta pour la mécanique quantique en 1925, et même il individualisait les vecteurs sous la forme $|x\rangle$, ou $\langle x|$, en bra et ket, John von Neumann, dans ses *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de 1932, préférait la symbolisation *(x,y)*, et nous allons essayer de voir pourquoi.

Il faut d'abord concevoir que l'on peut définir plus généralement un produit scalaire dans un espace vectoriel réel *S* en sélectionnant les seules trois propriétés précédentes. En fait, et pour des raisons de fond à propos des similitudes géométriques et de l'exponentielle complexe les portant, on a besoin de valeurs complexes, et donc d'espaces vectoriels complexes, que l'on peut encore noter *S*, et pour lesquels la seule propriété à changer est la symétrie hermitienne remplaçant la simple symétrie par échange de *x* et de *y*, à savoir :

-
- Pour tous *x* et *y* de *S*, $\langle y|x\rangle$ est le nombre complexe conjugué de $\langle x|y\rangle$.

On parle de produit hermitien. Du coup, on parle aussi d'un opérateur linéaire hermitien *A* de *S* dans *S* lorsque la propriété suivante est satisfaite :

-
- Pour tous *x* et *y* de *S*, $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$.

La propriété de positivité du produit hermitien implique une inégalité[45], dite de Cauchy-Schwarz-Buniakowski[46] compte tenu de son interprétation géométrique dans R³ :

$$\left|\langle x|y\rangle\right|^2 \leq \left|\langle x|x\rangle\right|\left|\langle y|y\rangle\right| \tag{9}$$

On ne doit pas s'étonner de la richesse de cette inégalité lorsqu'on constate qu'elle permet en dimension trois de définir l'angle par un cosinus. Aussi d'elle seule provient une autre relation pour deux opérateurs linéaires hermitiens *A* et *B* qui satisfont la relation *AB-BA= iI*, où *I* est l'opérateur identité. En effet, on dispose de :

$$\left|\langle x|x\rangle\right|^2 \leq 4\langle Ax|Ax\rangle\langle Bx|Bx\rangle \tag{10}$$

La vérification de (2) est quasi immédiate, à partir de *(AB-BA)x= ix*, de $\langle ABx,x\rangle = \langle Bx,Ax\rangle$, et de $\langle BAx,x\rangle = \langle Ax,Bx\rangle$, puisqu'alors $i\langle x,x\rangle = \langle (AB-BA)x,x\rangle = \langle Bx,Ax\rangle - \langle Ax,Bx\rangle$. La propriété

[45] Pour obtenir l'inégalité, il suffit de remarquer que l'application définie sur les nombres réels $\lambda \to \langle x+\lambda y|x+\lambda y\rangle$, qui s'exprime comme un polynôme du second degré en λ, reste toujours positive ou nulle, et donc le discriminant doit être négatif ou nul.

[46] Le livre de Hardy, *Inequalities*, Cambridge, 1932.

hermitienne fait que l'expression précédente est deux fois la partie imaginaire du nombre complexe $\langle Bx, Ax \rangle$, à laquelle il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakowski (9). C'est de celle-ci au fond que la relation d'incertitude va être déduite, mais il faut encore faire intervenir des espaces fonctionnels convenables.

III.2 L'espace de Schwartz

En vue de la théorie des distributions tempérées, c'est-à-dire pour éviter des difficultés de définition de certains opérateurs, Laurent Schwartz dans sa thèse de 1944 envisage l'espace vectoriel *S* des fonctions *f* définies sur l'axe réel et à valeurs complexes, qui sont indéfiniment dérivables et dont le comportement à l'infini (positif ou négatif) est tel que le produit d'une dérivée d'ordre quelconque de *f* par une puissance quelconque de la variable reste chaque fois borné. Cet espace a de bonnes conditions de régularité locales et de bonnes conditions de comportement à l'infini. On va bien vite comprendre son intérêt pour la transformée de Fourier[47]. Un produit scalaire sur ces fonctions est une expression utilisée depuis longtemps pour les équations différentielles dans le cadre du problème de Sturm-Liouville, débuté en 1836.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g}(t)dt\,.$$

On vérifie aisément que les opérateurs suivants $Af = i\dfrac{df}{dt}$, et $Bf = tf(t)$ sont des opérateurs hermitiens pour lesquels on a la relation de commutation précédente, à savoir *AB-BA= iI*. Par conséquent, l'inégalité (1) fournit la relation

$$\langle f, f \rangle \leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dt}(t)\right|^2 dt}.$$

Cette inégalité à elle seule peut conduire à l'inégalité d'Heisenberg, mais comme annoncé il vaut mieux passer par d'autres notions encore pour comprendre la nécessité de cette inégalité.

III.3 Les espaces de Hilbert

John von Neumann définit un espace de Hilbert *H* comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, pour lequel une propriété supplémentaire est exigée. L'espace *H*, quand il est muni de la norme que l'on peut déduire du produit scalaire ($\| f \| = \sqrt{\langle f | f \rangle}$), est complet : cette expression signifie qu'on dispose de la même condition nécessaire et suffisante de convergence d'une suite x_n d'éléments de *H* que si la suite était composée de nombres réels, ce qui revient à dire que la norme $\| x_p - x_q \|$ tend uniformément en *p* et *q* vers 0. La propriété majeure d'une espace de Hilbert est la représentation de toute forme linéaire continue sur cet espace par un élément de cet espace moyennant le produit scalaire.

Malheureusement, l'espace *S*, quoique muni d'un produit scalaire comme on l'a vu avec la définition intégrale, n'est pas complet. Mais on peut toujours construire un espace de Hilbert contenant *S* comme sous-ensemble dense, le complété de *S* muni du produit scalaire donné. On peut identifier ce complété à un espace de fonctions, celles des fonctions mesurables au sens de Lebesgue et dont le carré de l'intégrale existe. L'intégrale à prendre ici est obligatoirement celle de Lebesgue, nouvel avatar de la théorie de l'intégration qui permet de concrétiser l'espace de Hilbert complété de *S*. Le désavantage est que dans ce nouvel espace de Hilbert, souvent noté L^2 *(R),* la dérivation n'a pas

[47] Voir Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, trad. fr. et notes historiques, Jean Dhombres…

de sens ordinaire, et le produit par une puissance de *x* ne reste pas toujours dans $L^2\ (R)$. Peut-on pourtant remplacer *S* par un espace, qui ne serait pas de Hilbert, mais contiendrait le complété de *S*, et sur lequel la dérivation, comme la multiplication par une puissance de x aurait un sens ? L'idée est de passer par la transformée de Fourier dont on peut voir qu'elle échangeait les deux opérations.

III.4 La transformation de Fourier dans S

Pour une fonction *f* de *S*, la transformée de Fourier, déjà notée $\hat{f}$, est bien définie par

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi xy}.$$

Et sur *S*, les propriétés déjà décrites sont aisément justifiées. Sur *S* aussi, on dispose d'une conservation du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\langle \hat{f},\hat{g}\rangle$$

Cette relation se déduit aisément de la définition du produit de convolution comme correspondant en transformée de Fourier au produit ordinaire de deux fonctions de *S*, et de l'inversion de la transformée de Fourier. A joué la propriété dite spatiale de l'exponentielle complexe, celle qui au fond fait comprendre le phénomène d'addition des angles dans la multiplication de deux nombres complexes. On aura intérêt à définir une opération tilde sur les fonctions, en fait le passage à *–x* et à l'imaginaire conjugué.

Ceci dit, puisque l'espace *S* n'offre pas à la physique une souplesse suffisante en n'étant pas un espace de Hilbert, l'idée de Laurent Schwartz fut de définir un autre espace, celui écrit *S'*, constituée des formes linéaires continues sur l'espace *S*. La continuité exige toutefois une précision topologique, car l'espace *S* n'est pas un espace normé, mais lorsque ceci est mis en place, à tout élément *F* de *S'* on peut associer sa transformation de Fourier selon la règle :

$$(\hat{F},f)=(F,\hat{f}).$$

Ici les parenthèses servent à définir la valeur que la forme linéaire continue *F* prend en *f*. Mais si F désigne un élément de l'espace de Hilbert $L^2\ (R)$, on peut changer les parenthèses en des crochets, définissant de cette façon la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2\ (R)$ à partir de l'intégrale. On conçoit maintenant la raison pour laquelle von Neumann substitua les parenthèses aux crochets des physiciens tels que Dirac ou Heisenberg.

On peut démontrer que la transformée de Fourier est bijective sur *S'*, de la même façon qu'elle est bijective sur S et d'ailleurs sur $L^2\ (R)$. C'est-à-dire, avec des notations précédemment expliquées et pour des fonctions *f* de *S* auquel cas on pourrait marquer la variable *x,* mais aussi pour des distributions dites tempérées *F* , nom des éléments de *S',* qui ne sont plus des fonctions au sens ordinaire, mais sur lesquels peut porter l'opération tilde étendue aux distributions, ou encore pour des fonctions de $L^2\ (R)$.

$$\hat{\hat{f}}=\tilde{f}$$

La relation précédente se lit donc avec *f*, mais aussi bien avec *F* comme distribution tempérée et avec *f* comme élément de $L^2\ (R)$.

III.5 Les inégalités d'Heisenberg

Ces inégalités sont une conséquence de la relation (1), et font intervenir des constantes juste parce que la dérivation de l'exponentielle $e^{-2i\pi xy}$ le fait. On a avantage à utiliser une notation pour désigner la multiplication d'une fonction *f(x)* par *x*, sous la forme *(Mf)(x)= xf(x)*, qui fait disparaître la mention de la variable de la fonction concernée. Soit,

$$\frac{1}{4\pi}\langle f, f\rangle \leq \sqrt{\langle Mf, Mf\rangle\langle M\hat{f}, M\hat{f}\rangle}$$

Et du coup, on est conduit à écrire un opérateur *D* sur les fonctions selon $(Df)(t) = i\frac{df}{dt}(t)$, pour lequel aussi bien[48]

$$\frac{1}{4}\langle f, f\rangle \leq \sqrt{\langle Mf, Mf\rangle\langle Df, Df\rangle}$$

Il est facile, sous cette deuxième forme avec la transformation de Fourier, d'utiliser le vocabulaire et les notations des probabilités. En posant l'espérance mathématique *E(f)* de *f* comme valant $\int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2 dx$, et la variance *V(f)* comme valant $\int_{-\infty}^{\infty}(x - E(f))^2|f(x)|^2 dx$. On dispose pour toutes les fonctions *f* de la minoration :

$$V(f)V(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2} \tag{11}$$

En termes de représentation par les probabilités, on voit qu'on ne peut assurer une bonne précision de la mesure de la position simultanément avec une bonne mesure de la vitesse : c'est cela qui les a fait appeler les relations d'incertitude.

On doit constater que l'inégalité (11), qui porte sur des éléments mécaniques (position et vitesse), se trouve vérifiée précisément parce que ces éléments sont échangés par la transformation de Fourier qui impose ce que l'on peut appeler encore des symétries, au sens même où on a vu que prenait le terme grâce à la formule d'inversion. Aussi bien, les inégalités auront automatiquement lieu, dès lors que l'on adopte pour représentation de la mécanique un espace de Hilbert, ou aussi bien l'espace des distributions tempérées. L'incertitude, si on veut le dire ainsi, est le prix à payer pour changer la représentation classique de la vitesse et de la position en distributions ou en éléments de L^2 *(R)* qui ont *ipso facto* un caractère géométrique. C'est précisément cette géométrie que rappelle le produit scalaire avec des crochets, ou encore les parenthèses de von Neumann, et elle va jusqu'aux inégalités d'incertitude qui correspondent à la définition d'un angle en géométrie euclidienne ordinaire. L'écriture, cette fois, est la mémoire active des impératifs de la géométrisation de la mécanique quantique.

Et c'est cette géométrisation qui donne un sens aux relations d'orthogonalité que Fourier découvrait pour les modes propres, et qui lui donnaient la possibilité d'un calcul quasi automatique, sinon facile, des coefficients. Mais, par ailleurs, les relations d'incertitude sur les variances, le pluriel signifiant seulement qu'il y a plusieurs façons de les faire jouer, signale que si l'écart-type d'une fonction de norme 1 est très étroit, l'écart type de sa transformée de Fourier (elle-même forcément de norme 1) ne peut pas être également étroit. Cette absence de localisation simultanée des valeurs d'une fonction et de sa transformée de Fourier a donné lieu à une nouvelle théorie, les ondelettes, qui connaît depuis deux décennies au moins un succès remarquable, tant pour le format JPG que pour la détection des ondes gravitationnelles. Il est remarquable que si les sinusoïdes ne jouent plus le même rôle, du moins le succès du calcul par les ondelettes tient beaucoup à ce qu'il a été possible d'avoir des bases d'ondelettes satisfaisant les relations d'orthogonalité.

---

[48] Pour les fonctions de norme 1, on aura l'inégalité $\frac{1}{4} \leq \sqrt{\langle Mf, Mf\rangle\langle Df, Df\rangle}$, ou aussi bien $\frac{1}{4\pi} \leq \sqrt{\langle Mf, Mf\rangle\langle M\hat{f}, M\hat{f}\rangle}$.

IVème partie. Des exemples de choses calculables

On ne peut plus trouver étrange, après les divers exemples de calcul énumérés ci-dessus, de ne pas avoir commencé par une définition de ce que c'est que calculer. Et il n'est pas plus étrange, si du moins on accepte la leçon de l'histoire, de constater que la définition de ce qui est calculable n'avait pas fait l'objet de travaux avant le deuxième tiers du XX^{e} siècle. C'est Alan Turing en 1936, et précisément grâce à la machine éponyme, une machine de pensée qui sert néanmoins de base pour nos ordinateurs, qui a proprement défini le calculable. Est calculable ce qui sort de la machine lorsque on a mis du calculable en entrée. Je n'ai pas le temps, ici, de décrire cette « machine », ni de donner des propriétés de ce qui est calculable ; il me suffira de dire que les nombres et les séries entières, celles de Fourier aussi, entrent dans ce cas. Turing dit que sa machine fut conçue comme fonctionnant à la façon d'un être humain qui calcule. Et le calcul est entendu au sens restreint des opérations sur les nombres. Si la machine fait fondamentalement comme nous, pourquoi faudrait-il qu'elle nous dépasse ou nous encercle ? Mais surtout nous avons vu en IIe partie et avec les modes propres de Fourier, qu'il peut y avoir un plus notable à un calcul, en l'occurrence la périodicité d'une fonction *Y a priori* restreinte à n'être définie que sur un intervalle : ceci n'est pas enregistrable comme calculable ! L'apport tout aussi majeur de Turing est d'avoir permis de constater qu'il y a des situations qui ne sont pas calculables. Ce qui n'abolit en rien les possibilités du calcul. Je voudrais le montrer en partant d'une situation qui concerne les *Big Data*.

IV.1 Un problème sur les données

Si les spécialistes reconnaissent une croissance inflationniste des données numérisées, ils donnent néanmoins le nom surprenant « d'univers », voire parlent à l'intérieur de ces données de « communautés », de « cliques », etc. Quelque chose est spécifique aux traitements des « données massives », qui tient à ce que les experts se dotent fondamentalement d'une représentation imagée. Elle utilise notre très vieille habitude de penser par figures géométriques, ou par figures logiques spatialisées, et donc crée, comme c'est évidemment voulu, une impression de réel que nous intégrons presque d'un coup. Alors qu'il faut toujours voir que l'emploi de mots du réel ordinaire en mathématiques, une vieille habitude, n'a rien d'innocent, et « cache » le jeu de la mathématisation. On l'a vu avec le graphe d'une fonction numérique et l'invention de la fonction sinus.

J'entre dans le concret du monde des « données massives » en montrant une image (fig. 18), qui est vraiment une performance de l'*out-put*. Elle est relative au résultat de la mise en place d'un algorithme considéré comme très performant lui aussi, celui dit de Louvain, mais qui n'est pas l'optimum et ne cherche pas à l'être : j'oublie pour le moment le jeu de cet algorithme (qui sera bientôt décrit) et ne donne que l'image[49] qui en résulte, rapportant le langage utilisé par un des inventeurs et des collègues poursuivant le travail. Sur l'illustration ci-dessous, qui n'apparaît pas plus mathématique qu'une carte (de plus en couleurs) des stations non nommées d'un quelconque métro, les spécialistes parlent néanmoins de « communautés ». Les points qui les constituent ne sont pas tous distingués par la couleur, puisque l'œil distingue nettement trois regroupements de communautés en constatant seulement le peu de segments les liant les unes aux autres. Cette réalisation d'une

[49] Je tire cette image de l'article pionnier, de V. Blondel, J-.L. Guillaume, R. Lambiotte et F. Lefebre, intitulé : *Fast unfolding of communities in large networks*, *Journal of Statistical Mechanics*, n° 10, sept. 2008. Bien des améliorations et des critiques furent ensuite apportées à cette présentation.

hiérarchisation de communautés se fait d'un seul coup devant nos yeux, là où les données effectives, c'est-à-dire numériques, sont des liaisons, par exemple des communications téléphoniques, sans pour autant que la disposition des différents points colorés soit imposée par ces données. Le fait de les représenter par des segments de droite entre des points est une configuration familière, accentuée par l'astuce de rapprocher sur le dessin certains points qui font en quelque sorte masse, et de séparer spatialement ces regroupements lorsque les liaisons qu'ils entretiennent entre eux sont différentes. Je n'ai bien sûr pas à nier la réalité de ces regroupements, qui est l'avantage de l'algorithme mis en jeu (et dont on ne voit pas la présence sur le dessin) et celle de la géométrisation utilisée. Mais je fais une différence avec d'autres regroupements auxquels nous sommes plus ou moins habitués et qui tiennent aussi au traitement de données. La seule opération que je veux évoquer ici est la nature du calcul nécessaire à l'obtention de telles communautés. Le mot « algorithme » plus tôt employé suffit à comprendre cette prédominance du calcul.

.

Figure 18. Représentation des communautés d'après l'article cité précédemment de 2008.

Pour ce dernier exemple, je pars directement d'une situation type des données massives. Celles où l'on dispose d'un nombre de numéros de téléphone par exemple, et des seules liaisons issues d'un numéro à l'autre dans ces mêmes données. On voit qu'avec un petit nombre de ces relations entre ces numéros, on peut avoir des représentations aussi distinctes que les cinq qui sont données ci-dessous.

Ce sont des graphes. Les points représentent des numéros de téléphone, et les traits, dits arêtes, sont les liaisons. Par ceux, si simples qu'on peut les dessiner ci-dessous, on comprend les quatre premières expressions de graphe homogène, graphe hiérarchique, graphe cyclique, ou graphe centralisé. Et on acceptera le vocabulaire désignant le dernier graphe comme quelconque.

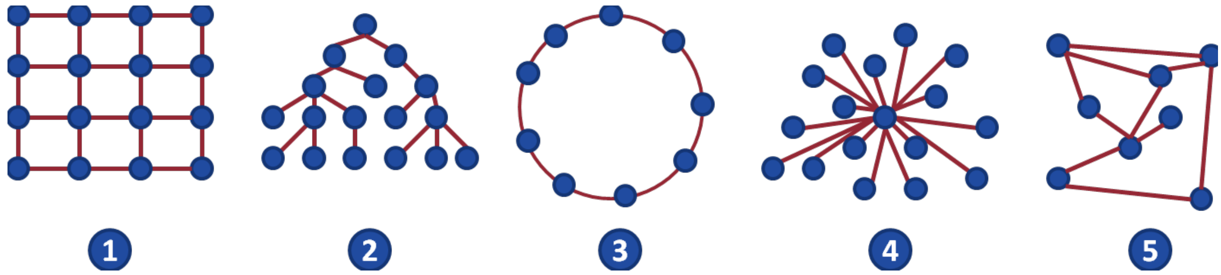


Figure 19.

De la même façon on peut comprendre les désignations pour un graphe « décomposé » en sous-unités, ou pôles comme indiqué ci-dessous, où il y a deux parties que l'on peut considérer chacune indépendamment du reste comme des graphes centralisés.

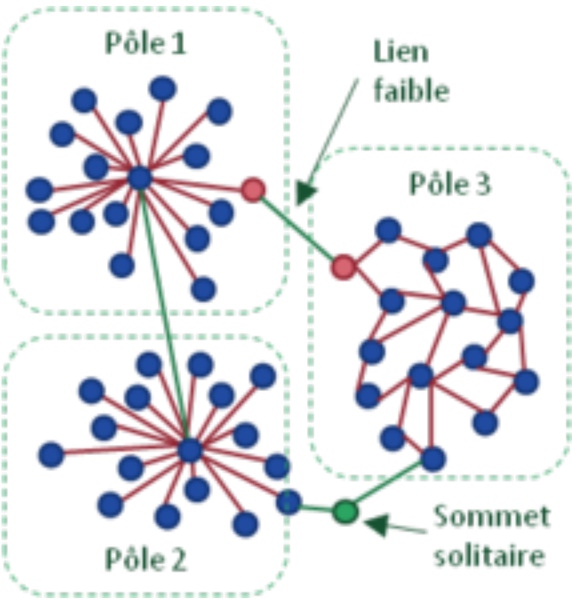


Figure 20.

On devine que, s'il y a un milliard de telles données, on peut avoir des situations vraiment quelconques, mais aussi de possibles sous-divisions. La notion de « quelconque » si vague dans l'exemple numéroté 5 d'un graphe peut prendre un sens probabiliste précis lorsqu'il y a un très grand nombre de données et que l'on se place en un nœud du graphe. Ce serait justement la situation « normale » d'un graphe au hasard, comme celle de la loi normale de répartition de valeurs aléatoires d'événements indépendants autour de la moyenne. Du coup on peut penser, grâce à cette notion que je ne fais qu'esquisser, effectuer un calcul pour déterminer s'il est possible de trouver des

« communautés » dans un graphe. Le dessin fourni en premier dans cette dernière partie est évidemment parlant. C'est son obtention, donc une représentation, qui est l'objet de ce qu'on appelle l'algorithme de Louvain.

La mise en œuvre de l'algorithme de Louvain requiert de considérer la matrice (a_{ij}), composés de 0 et de 1 seulement, en prenant la valeur 1 seulement s'il existe une liaison entre P_i (c'est à dire sur mon exemple le i-ème numéro de téléphone) et P_j. Cette matrice numérique dépend évidemment de la numérotation attribuée aux différents numéros de téléphone pour rester dans l'exemple choisi pour ce graphe. Mais si l'on échange deux points en i et j, on ne fait qu'échanger les deux colonnes correspondantes de la matrice. Du point de vue vectoriel, ou de l'algèbre linéaire, on ne change rien aux propriétés intrinsèques de la transformation associée à la matrice. Il est donc loisible de travailler avec une telle matrice lorsque des propriétés du graphe sont en jeu. Voilà un premier point d'acquis. Un deuxième est de savoir mesurer la notion de communauté, c'est-à-dire d'établir un coefficient, un rapport, entre la densité relative des arêtes (les traits du graphe) à l'intérieur d'une communauté à celle des arêtes à l'extérieur. Il faut donc connaître ces communautés. On peut appeler c_i celle à laquelle appartient P_i. On a avantage à introduire quelque chose de plus par rapport à la théorie des graphes usuelle, en parlant de poids d'une arête, qui correspondrait au nombre de coups de téléphone passés entre les deux bouts de l'arête. Et d'introduire ce nombre, poids de l'arête, dans les coefficients de la matrice (a_{ij}) pour disposer des A_{ij}. On appelle enfin k_i la somme des poids des arêtes liées au point P_i, et comme de densité relative il s'agit, on fait intervenir m, qui est la somme de tous les poids de toutes les arêtes du graphe. On définit maintenant la modularité par une expression algébrique, le dernier terme en δ ne prenant que deux valeurs, 0 et 1, selon que i est différent de j ou i égal à j.

$$Q = \frac{1}{2m}\sum_{i,j}\left[a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}\right]\delta(c_i, c_j) \qquad (12)$$

C'est bien sûr à la tâche de déterminer les communautés qu'il faut s'atteler, alors que la modularité en dépend. Du coup, on procède de façon heuristique en posant d'abord de petites communautés, puis en calculant (une sorte de différentielle sur des nombres entiers) ce qu'apporte à la modularité un changement de placement de P_i à la communauté de chacun des voisins de P_i. On place dès lors P_i dans la communauté qui provoque le plus grand accroissement de la modularité, sinon on le conserve dans sa communauté. Lorsque ceci est fait, un nouveau graphe intervient à partir des nouvelles communautés considérées comme des points. A ceci près qu'il faut faire intervenir des arêtes allant d'un point à lui-même, des boucles donc dans le graphe, et l'on groupe ainsi toutes les arêtes de chaque nouvelle communauté, ce qui impose de mieux définir le poids de chaque arête dans un graphe. On peut à nouveau reprendre le travail d'optimisation de la modularité sur le nouveau graphe. Les inventeurs sont heureux de dire que sur un PC il prend 2 minutes pour traiter ainsi un réseau « typique » à deux millions de nœuds, et trois heures pour des graphes de plus d'un milliard de sommets et d'arêtes.

Je peux résumer du point de vue de la méthode utilisée. *A priori*, et à partir d'une représentation matricielle d'un graphe, on a défini une fonction, la modularité, qui dépend de communautés déterminées. Il s'agit ensuite de modifier ces communautés par des opérations de regroupement pour augmenter la modularité. C'est là qu'intervient un moyen de calcul et il doit se répéter. Mais comme il s'agit d'approximations, et se présente ici le caractère expérimental du calcul, la question est de savoir si la détection – trouver des communautés – est efficace. Notamment pour les petites communautés. Car ce sont quelquefois les petites communautés, les cas exceptionnels si l'on veut, qui peuvent faire l'objet de la recherche. C'était bien sûr cela qui était *a priori* étudié par les services de renseignements sur le terrorisme. La stabilité du processus n'est pas acquise. Mais une seconde question se pose, savoir si l'on a fait au mieux. On entre là dans des questions particulièrement intéressantes de mesure de la performance des calculs.

IV.2 Une question d'optimisation

Comme on a vu qu'il y a une part de tâtonnements dans la mise en œuvre de l'algorithme, et qu'on n'est pas sûr non plus de l'efficacité indiscutable du procédé, on doit poser la question de l'optimisation du procédé. C'est-à-dire estimer le nombre d'opérations à effectuer lorsqu'on a un graphe à n points pour en extraire les communautés selon le procédé dit de Louvain, mais aussi tenter de déterminer si l'on a fait au mieux. On estime aisément que lorsque l'on veut trier n éléments (par exemple des noms), il faille $n(n-1)$ opérations, donc de l'ordre de n^2 opérations, et l'on dit usuellement que le calcul est en $O(n^2)$ puisque c'est l'ordre à l'infini qui compte. Or on a pu trouver un moyen de tri (*quicksort*) qui est en $O(nlogn)$. Peut-on être sûr que ce dernier moyen est optimal au sens de l'estimation asymptotique de la valeur en n ? L'apport de Turing est d'établir que des questions de ce genre ne sont justement pas calculables. Optimiser *a priori* la modularité d'une partition en communautés d'un graphe (c'est-à-dire d'un réseau) relève de ce qu'on appelle un problème *NP-difficile* que je ne chercherai pas à expliciter. La méthode de Louvain ne le résout évidemment pas, et ne calcule pas non plus le type de complexité de l'algorithme mis en jeu puisqu'elle fait jouer son rôle au savoir-faire, avec le choix de petites communautés au départ de l'algorithme d'optimisation de la modularité. On pressent cependant que son coût est quasi linéaire (en O(*nlogn*)), comme l'algorithme le plus usuel de tri. La manière heuristique de calculer n'en privilégie pas moins les communautés de grande taille, et peut même donner lieu à des partitions « de bonne qualité »… dans des graphes qui pourtant n'ont pas de communautés. On recherche alors des améliorations, faisant intervenir des notions qui ne sont pas seulement celles de la taille, mais bien la « qualité », donc la fiabilité de la méthode.

Conclusion succincte pour ce récit en quatre parties

Le calculable au sens moderne de Turing, pourtant obtenu déjà par les séries entières qui ont permis la fonction sinus et la qualité de sa représentation au XVII^{e} siècle, n'est qu'un cas, certes riche et bien encadré, des calculs possibles. Les modes propres de Fourier, le caractère ondulatoire de la diffusion de la chaleur, sont d'autres exemples issus de calculs qui ne relèvent pas de la machine de Turing. Cette machine, en algorithmique actuelle, conduit certes à se poser les bonnes questions sur la difficulté d'un problème. Mais, en un sens, Fourier a pensé en sens inverse. C'est parce qu'il avait un long calcul aboutissant à un résultat simple qu'il a pensé qu'un calcul simple était disponible. Il obtenait les relations d'orthogonalité.

Imaginer un calcul n'est pas toujours facile, et l'exemple de Roberval était utile en I^{ère} partie pour montrer qu'en dépit d'une innovation considérable sur les fonctions numériques, il ne pouvait prévoir le Calcul. Même si ses calculs sur les sommes de Roberval sont remarquables. En ce sens ses propres calculs furent une sorte d'obstacle épistémologique

Assumer la part imprescriptible du calcul ne revient pas à faire de tout calcul bien mené un garant de découverte. Mais ne peut-on pas dire que le calcul joue en mathématique le rôle de l'expérimentation en physique ? C'est-à-dire une confrontation avec le réel, aussi peu précis que puisse être ce dernier mot ! Autrement dit, il est plus que vraisemblable que ce qui tire sur plus d'un siècle l'Analyse de Fourier hors du si remarquable Calcul classique, est précisément sa rencontre avec une physique des ondes, et qu'en retour celle-ci, par l'inégalité de Heisenberg, a contraint cette même Analyse à mieux comprendre le rôle fondamental de notions géométriques comme les relations d'orthogonalité, au fond situées à mi-chemin entre l'abstrait et la sensation commune, bien sûr tamisée par des siècles d'enseignement d'Euclide.

Vème Partie. Quelques références à des articles de Jean Dhombres

Pour la Ière Partie sur les rapports de Roberval et Torricelli et la cycloïde :

La boîte à outils du physico *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, vol. 18, fasc2, 2016, p. 67-130.

Is one proof enough : travels with a mathematician of the baroque period, *Educational Studies in Math*, 24, 1993, pp. 401-419.

Las progresiones infinitas : el papel del discreto y del continuo en el siglo XVII, *Llull*, vol. 16, n° 30, 1993, pp. 43-114.

La culture mathématique au temps de la formation de Desargues : le monde des coniques, in J. Dhombres, J. Sakarovitch (éd.), *Desargues en son temps*, Paris, Blanchard, 1994, pp. 55-86.

Un parcours baroque : la quadrature du cercle, 1600-1774, in *Diffusion du savoir et affrontement des idées*, Montbrison, pp. 161-197.

Des machineries d'images au service de la vérité mathématique : images analytiques, figures géométriques et peintures baroques au XVIIe siècle, *Réminisciences* 7, Brepols, 2005, pp. 73-165.

Qu'est-ce qu'un rendu artistique de la beauté proprement mathématique des proportions ? L'analogie réalisée, in L. d'Agostino, C. Zotti, *L'espace spirituel. La pensée comme patrimoine*, Serre éditeur, 2007, pp. 51-120.

La trajectoire d'une parabole. Métamorphoses de la philosophie naturelle sous l'effet des mathématiques, XIIIe Entretiens de la Garenne Lemot, J. Pigeaud (dir), *Métamorphose(s)*, PUR, 2010, pp. 213-241.

Le jet d'eau et l'arc-en-ciel à l'âge baroque : réalisation des mathématiques, mathématisation de la philosophie naturelle et représentation des phénomènes, Frédéric Cousinié, Clélia Nau (dir.) *L'artiste et le philosophe. L'histoire de l'art à l'épreuve de la philosophie au XVIIe siècle*, PUR, Rennes, 2011, pp.151-196.

Calcoli e forme d'invenzione nella matematica francese del Seicento, Claudio Bartocci, Piergirogio Odifreddi,(ed.), *La matematica*, Vol. Primo, Einaudi, 2007, pp. 283-329.

Le compas et la règle comme figures de la mélancolie des mathématiques, in *Une traversée des savoirs. Mélanges offerts à Jackie Pigeaud*, Presses de l'Université Laval, 2008, pp. 329-370.

(avec Patricia Radelet-de Grave), *Une mécanique donnée à voir : les thèses de statique défendues à Louvain en 1624,* Brepols, 609 pages, 2009.

A new narrative centered on Toricelli and Roberval with the cycloid as a pretext, in Raffaee Psano (ed.), *Torricelli's Opera mathematica*, à paraître, 125 pages

Jean Dhombres, Retrouver la première analyse de la cycloïde à partir des échanges entre Roberval et Torricelli, 52 p. à paraître.

Pour la IIe et la IIIe partie sur Fourier :

(avec Jean-Bernard Robert), *Joseph Fourier, créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 1998.

De Marin Mersenne à Joseph Fourier : La boîte à outils graphiques du physico-mathématicien, *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, vol. 18, fasc2, 2016, p. 67-130.

De l'écriture des mathématiques en tant que technique de l'intellect, in Eric Guichard (dir.), *Ecritures : Sur les traces de Jack Goody*, Presses de l'ENSSIB, Lyon, 2012, pp. 157-198.

(avec Suzanne Debarbat et Serge Sochon), *Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Le parcours d'un savant*, Paris, Hermann/L'Observatoire de Paris, 2012.

Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Archive for History of Exact sciences*, vol. 36, n° 2, 1986, pp. 91-181.

"Adégaliser" en Occitanie, J. Cassinet (éd.), *Chemins mathématiques occitans de Gerbert à Fermat*, Toulouse, 1995, pp. 161-200.

Shadows of a Circle, or What is There to be Seen ? Some Figurative Discourses in the Mathematical Sciences during the Seventeenth Century, L. Massey (ed.), *The Treatise on Perspective : Published and Unpublished,* Yale University Press, 2003, pp. 177-211.

(avec Carlos Alvarez), *Une histoire de l'imaginaire mathématique. Vers le théorème fondamental de l'algèbre et sa démonstration par Laplace en 1795*, Paris, Hermann, 2011.

Mirum non est mirum. La gauche et la droite au miroir des mathématiques, Jackie Pigeaud (dir.), *XV*es *Entretiens de La Garenne Lemot, Le miroir*, PUR, Rennes, 2011, pp. 77-106.

Pour la IVe Partie sur Turing :

Connaît-on vraiment ce que l'on tire de soi ? Ou l'apprivoisement des mondes mathématiques par Viète, Turing, Weyl, Weil et Pascal*, Entretiens de la Garenne Lemot*, PUR, 2018, à paraître

Au cœur des mathématiques les plus profondes, in *Lettres à Alan Turing*, réunies par Jean-Marc Lévy-Leblond, éditions Thierry Marchaise, Paris, 2016, p. 75-89.

Une déconstruction d'une histoire des limites, de François Viète aux ultrafiltres, in Jackie Pigeaud (dir.), *XVI*es *Entretiens de la Garenne Lemot, La limite*, Presses de l'Université de Rennes, Rennes, 2012, pp. 77-110.

(Avec J. Aczel) *Functional equations in several variables***,** Cambridge University Press, 2e éd., 2008.

Walter Rudin, Analyse réelle et complexe, Paris,

Continuités et discontinuités et autres travaux en histoire et philosophie des mathématiques, éd. par Arthur Perret, Atelier de programmation, ENSSIB, 2017.